

M.K. LISTRIK MAGNET

JOBSHEET 9

MAGNETOSTATIKA

Dalam magnetostatika dibahas tentang arus listrik searah dan induksi magnetik yang dihasilkan oleh arus listrik searah. Arus listrik merupakan sumber dari gejala kemagnetan baik dalam ukuran makro maupun secara mikro seperti dalam atom yang disebut sebagai arus amperian karena pertama kali dikemukakan oleh Ampere. Dalam teknologi listrik banyak digunakan induksi magnetik seperti pembuatan elektromagnet dan pita rekaman. Setelah mempelajari bab ini diharapkan mahasiswa mampu menjelaskan tentang arus listrik, hukum Ampere dan induksi magnetik yang dihasilkan oleh arus listrik.

5.1 ARUS LISTRIK

Berdasarkan bentuk distribusinya arus listrik dapat dibedakan atas arus filamen, arus permukaan dan arus volume. Berdasarkan ketergantungan arus terhadap waktu arus listrik dibedakan atas arus searah dan arus bolak balik. Jika penampang medium dimana arus listrik terdapat adalah tertentu atau tetap arus disebut arus konduksi dan disebut arus konveksi bila penampang mediumnya tidak tertentu besarnya.

5.1.1 Arus Filamen

Arus filamen adalah arus yang terdapat pada penghantar berbentuk batang yang sangat tipis atau berbentuk garis misalnya sepotong kawat yang halus. Misalkan suatu rapat muatan garis λ bergerak pada kawat dengan kecepatan v seperti dapat dilihat pada Gambar 5.1.



Gambar 5.1. Arus Filamen.

Dalam segmen panjang $v\Delta t$ membawa muatan sebesar $\lambda v\Delta t$ atau

$$dl = v\Delta t = \Delta l \quad (5-1)$$

Muatan yang mengalir melalui titik A dalam interval waktu Δt adalah

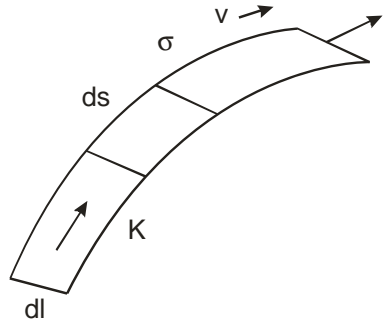
$$dq = \lambda v\Delta t = \Delta q \quad (5-2)$$

Arus pada titik A atau pada semua titik pada kawat adalah

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\lambda v\Delta t}{\Delta t} = \lambda v \quad (5-3)$$

5.1.2 Arus Permukaan

Arus permukaan adalah arus yang terdapat pada permukaan penghantar berbentuk bidang misalnya pada permukaan silinder, kubus atau bola. Misalkan suatu rapat muatan permukaan σ bergerak pada kawat dengan kecepatan v seperti dapat dilihat pada Gambar 5.2.



Gambar 5.2. Arus permukaan.

Jarak dan luas yang ditempuh oleh muatan

$$ds = v\Delta t = \Delta s \quad (5-4)$$

$$dA = \Delta l \Delta s \quad (5-5)$$

Dalam segmen luas dA membawa muatan sebesar $\sigma \Delta A$ atau $\sigma \Delta l \Delta s$ atau

$$dq = \sigma \Delta A = \sigma \Delta l \Delta s = \sigma \Delta l v \Delta t \quad (5-6)$$

Unsur arus yang terdapat dalam luasan dA adalah

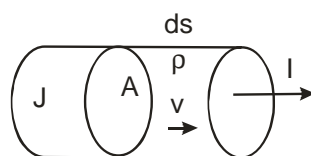
$$\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \dagger \Delta l v \quad (5-7)$$

Rapat arus permukaan K didefinisikan sebagai arus yang melewati Δl yang tegak lurus pada arah arus

$$K = \frac{\Delta I}{\Delta l} = \frac{\dagger \Delta l v}{\Delta l} = \dagger v \quad (5-8)$$

5.1.3 Arus Volume

Arus volume adalah arus yang terdapat pada seluruh bagian penghantar misalnya dalam silinder, kubus atau bola. Misalkan suatu rapat muatan volume ρ bergerak dalam penghantar dengan kecepatan v seperti dapat dilihat pada Gambar 5.3.



Gambar 5.3. Arus volume.

Jarak dan volume yang ditempuh oleh muatan

$$ds = v\Delta t = \Delta s \quad (5-9)$$

$$d\tau = \Delta A \Delta s = \Delta \tau \quad (5-10)$$

Dalam segmen volume $\Delta\tau$ membawa muatan sebesar $\rho \Delta\tau$ atau $\rho\Delta A\Delta s = \rho \Delta A v\Delta t$ atau

$$dq = \rho \Delta A\Delta s = \rho \Delta A v\Delta t \quad (5-11)$$

Unsur arus yang terdapat dalam volume $d\tau$ adalah

$$\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \dots dAv \quad (5-12)$$

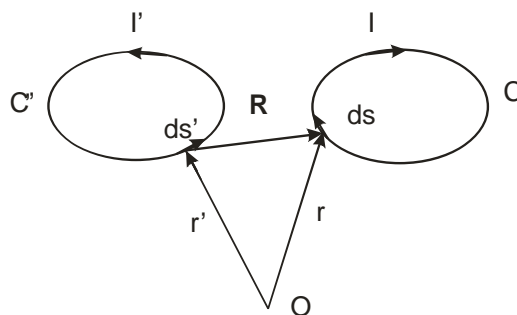
Rapat arus volume \mathbf{J} didefinisikan sebagai arus yang melewati ΔA yang tegak lurus pada arah arus

$$\mathbf{J} = \frac{\Delta I}{\Delta A} = \frac{\dots dAv}{dA} = \dots v \quad (5-13)$$

5.2 HUKUM AMPERE

Gaya yang bekerja pada rangkaian C yang dilakukan oleh rangkaian C' seperti dapat dilihat pada Gambar 5.4 adalah

$$\mathbf{F}_{C' \rightarrow C} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{I ds \times (I' ds' \times \hat{R})}{R^2} \quad (5-14)$$



Gambar 5.4. Gaya antara dua rangkaian.

Persamaan di atas disebut Hukum Ampere dimana μ_0 adalah permeabilitas ruang hampa yang besarnya adalah :

$$\mu_0 = 4 \times 10^{-7} \text{ newton/(ampere)}^2 \quad (5-15)$$

Jika terdapat lebih dari satu rangkaian sumber maka gaya yang bekerja pada C adalah

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{F}_{\text{total pada C}} = \sum_{C'} \mathbf{F}_{C' \rightarrow C} \quad (5-16)$$

Dengan menggunakan sifat-sifat operasi vektor dan diferensial berikut ini :

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\hat{R}}{R^2} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$du = ds \cdot \nabla u$$

dimana :

$$ds = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$\nabla u = \hat{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial u}{\partial z}$$

Persamaan (5-14) dapat ditulis :

$$F_{C' \rightarrow C} = \frac{\tilde{0}}{4f} \oint_C \oint_{C'} \frac{Idsx(I' ds' \cdot \hat{R})}{R^2} = I I' ds' \left(ds \cdot \frac{\hat{R}}{R^2} \right) - \frac{I I' R (ds \cdot ds')}{R^2}$$

$$= -I I' ds' \left[ds \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] - \frac{I I' \hat{R} (ds \cdot ds')}{R^2}$$

$$= I I' ds' d \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{I I' \hat{R} (ds \cdot ds')}{R^2} \quad (5-17)$$

$d \left(\frac{1}{R} \right)$ adalah perubahan diferensial dalam $(1/R)$ akibat penyimpangan sepanjang C.

Dengan demikian gaya yang bekerja pada C oleh C' dapat ditulis :

$$F_{C \rightarrow C} = -\frac{\tilde{\gamma}_0 I I'}{4f} \oint_{C'} ds' \oint_C d\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{\tilde{\gamma}_0 I I'}{4f} \oint_C \oint_{C'} \frac{(ds \cdot ds') \hat{R}}{R^2} \quad (5-18)$$

Integral sepanjang C merupakan lintasan tertutup,

$$\oint_C d\left(\frac{1}{R}\right) = \left(\frac{1}{R}\right)_f - \left(\frac{1}{R}\right)_i = \left(\frac{1}{R}\right)_i - \left(\frac{1}{R}\right)_i = 0$$

Sehingga,

$$F_{C \rightarrow C} = -\frac{\tilde{\gamma}_0 I I'}{4f} \oint_C \oint_{C'} \frac{(ds \cdot ds') \hat{R}}{R^2} \quad (5-19)$$

Sebaliknya gaya yang bekerja pada C' oleh C dapat ditulis :

$$F_{C \rightarrow C'} = -\frac{\tilde{\gamma}_0 I' I}{4f} \oint_{C'} \oint_C \frac{(ds' \cdot ds) \hat{R}'}{R'^2} \quad (5-20)$$

dimana $\mathbf{R}' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$. Karena $R' = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = R$ diperoleh $\hat{R}' = -\hat{R}$ juga $ds' \cdot ds = ds \cdot ds'$ maka

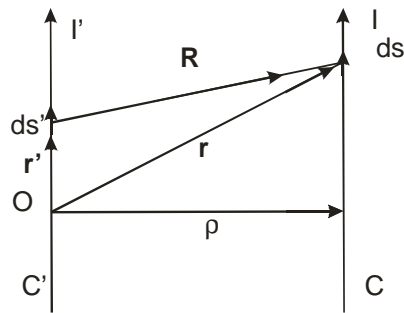
$$F_{C \rightarrow C'} = -F_{C' \rightarrow C} \quad (5-21)$$

Untuk situasi statik dimana rangkaian berada dalam keadaan diam pada posisi tetap haruslah ada gaya mekanik luar yang bekerja pada rangkaian C sehingga

$$F_{C \rightarrow C} + F_{C,m} = 0 \quad (5-22)$$

Ini juga berlaku untuk rangkaian C'.

5.2.1 Dua Kawat Berarus Lurus Panjang



Gambar 5.5. Gaya antara dua kawat berarus lurus panjang.

$$\mathbf{r} = \dots + z \hat{z} \quad \text{dan} \quad \mathbf{r}' = z' \hat{z}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \dots + (z - z') \hat{z}$$

$$R^2 = \dots^2 + (z - z')^2$$

$$ds = dr = dz \hat{z}$$

$$ds' = dr' = dz' \hat{z}$$

karena \dots dan \hat{z} konstan.

Karena $\hat{R} = \mathbf{R}/R$, diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{dsx(ds' \times \hat{R})}{R^2} &= \frac{dzdz' \hat{z} \times \{ \hat{z} \times [\dots \hat{z} + (z - z') \hat{z}] \}}{R^3} \\ &= - \frac{\dots dzdz' \hat{z}}{\left[\dots^2 + (z - z')^2 \right]^{3/2}} \end{aligned} \quad (5-23)$$

Dengan demikian persamaan (5-14) dapat ditulis sebagai

$$F_{C' \rightarrow C} = - \frac{\mu_0 I' \dots}{4f} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{\left[\dots^2 + (z - z')^2 \right]^{3/2}} \quad (5-24)$$

Dengan mengambil substitusi $t = z' - z$, $dt = dz'$ maka diperoleh :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{[\dots^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{2}{\dots}$$

Sehingga :

$$F_{C' \rightarrow C} = -\frac{\tilde{\mu}_0 I' \dots'}{2f \dots} \int_{-\infty}^{\infty} dz \quad (5-25)$$

atau dalam bentuk diferensial diperoleh :

$$dF = -\frac{\tilde{\mu}_0 I' \dots'}{2f \dots} dz$$

Untuk gaya persatuan panjang diperoleh,

$$f_c = \frac{dF}{dz} = -\frac{\tilde{\mu}_0 I' \dots'}{2f \dots} \quad (\text{arus paralel}) \quad (5-26)$$

$$f_c = \frac{dF}{dz} = \frac{\tilde{\mu}_0 I' \dots'}{2f \dots} \quad (\text{arus anti paralel}) \quad (5-27)$$

5.3 INDUKSI MAGNETIK

5.3.1 Definisi Induksi Magnetik

Persamaan (5-14) dapat ditulis dalam bentuk :

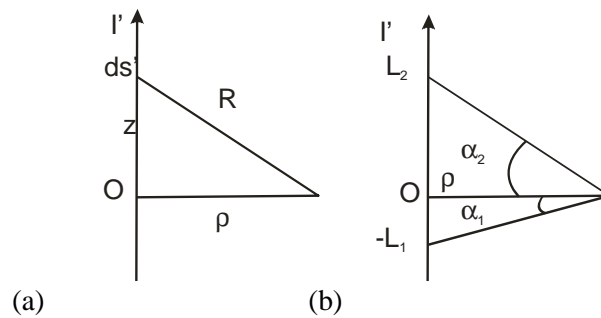
$$F_{C' \rightarrow C} = \oint_C Ids \times \left(\frac{\tilde{\mu}_0}{4f} \right) \oint_{C'} \frac{(I' ds' \times \hat{R})}{R^2} \quad (5-28)$$

Besaran

$$B(r) = \frac{\tilde{\mu}_0}{4f} \oint_{C'} \frac{(I' ds' \times \hat{R})}{R^2} = \frac{\tilde{\mu}_0}{4f} \oint_{C'} \frac{(I' ds' \times \vec{R})}{R^3} \quad (5-29)$$

Disebut sebagai induksi magnetik B. Hukum ini biasa disebut Hukum Biot-Savart.

5.3.2 Arus Lurus Panjang



Gambar 5.6. Arus lurus panjang.(a) Panjang tak berhingga, (b) Panjang berhingga

$$\mathbf{r} = \dots \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{r}' = z' \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \dots \hat{\mathbf{z}} - z' \hat{\mathbf{z}} \quad d\mathbf{s}' = dz' \hat{\mathbf{z}} \text{ diperoleh}$$

$$R^2 = \dots^2 + z'^2 \text{ dan } d\mathbf{s}' \times \mathbf{R} = dz' \hat{\mathbf{z}} \times \dots \hat{\mathbf{z}} = dz' \hat{\mathbf{y}}$$

Dengan demikian maka :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I' d\mathbf{s}' \times \mathbf{R}}{R^3}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I' \dots \hat{\mathbf{y}}}{4\pi} \int_{-L_1}^{L_2} \frac{dz'}{(\dots^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I' \dots \hat{\mathbf{y}}}{4\pi} \left[\frac{z'}{\dots^2 + (\dots^2 + z'^2)^{1/2}} \right]_{-L_1}^{L_2}$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}} \frac{\mu_0 I' \dots}{4\pi} \left[\frac{L_2}{(\dots^2 + L_2^2)^{1/2}} + \frac{L_1}{(\dots^2 + L_1^2)^{1/2}} \right]_{-L_1}^{L_2} \quad (5-30)$$

Jika ditulis dalam bentuk sin α maka

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}} \frac{\mu_0 I' \dots}{4\pi} (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1) \quad (5-31)$$

Untuk arus panjang tak berhingga dimana $L_2 \rightarrow \infty$ dan $L_1 \rightarrow -\infty$ sehingga $\alpha_2 \rightarrow \pi/2$ dan

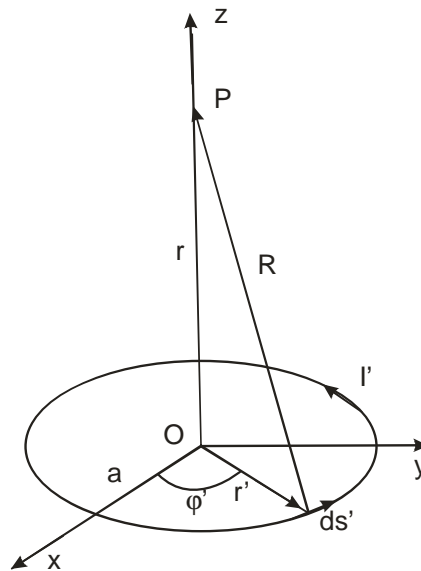
$\alpha_1 \rightarrow \pi/2$ menghasilkan induksi magnetik :

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}} \frac{\mu_0 I' \dots}{2\pi} \quad (5-32)$$

5.3.3 Induksi Aksial Oleh Arus Melingkar.

Jika rangkaian arus berbentuk melingkar induksi magnetik pada sumbu lingkaran dapat ditentukan dengan mempergunakan persamaan :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4f} \oint_{C'} \frac{I' d\mathbf{s}' \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (5-33)$$



Gambar 5.7. Induksi aksial oleh arus melingkar.

$$\mathbf{r} = z \hat{z} \quad \text{dan} \quad \mathbf{r}' = x \hat{x} + y \hat{y} = a \left(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \right)$$

Vektor posisi relatif \mathbf{R} dapat ditentukan dari :

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = z \hat{z} - a \cos \phi \hat{x} - a \sin \phi \hat{y} \quad \text{dan} \quad R^2 = z^2 + a^2$$

$$d\mathbf{s}' = d\mathbf{r}' = d \left[a \left(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \right) \right] = a d\phi \left(-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \right)$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{s}' \times \mathbf{R} &= \left[z \hat{z} - a \cos \phi \hat{x} - a \sin \phi \hat{y} \right] \left[a d\phi \left(-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \right) \right] \\ &= a d\phi \left[z \left(\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \right) + a \hat{z} \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\tilde{\sim}_0 I' a^2}{4f} \int_0^{2f} \frac{z \left(\cos \{ \hat{x} + \sin \{ \hat{y} \} + a \hat{z} \right)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\{ \quad (5-34)$$

Hasil dari integrasi di atas adalah,

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\tilde{\sim}_0 I' a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \quad (5-35)$$

Terdapat dua keadaan khusus :

(1) Pada pusat lingkaran dimana $z = 0$

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\tilde{\sim}_0 I' a^2}{2a} \hat{z} \quad (5-36)$$

(2) Pada jarak yang jauh dari pusat lingkaran dimana $z \gg a$

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\tilde{\sim}_0 I' a^2}{2z^3} \hat{z} \quad (5-37)$$

Untuk arus dengan N lilitan harga $\mathbf{B}(z)$ adalah

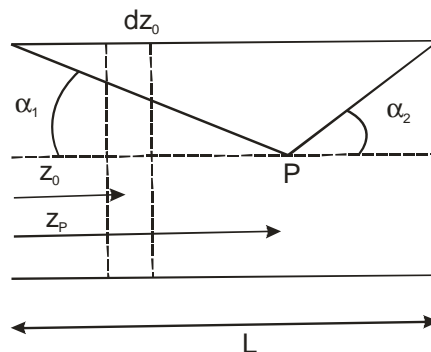
$$\mathbf{B}(z) = \frac{\tilde{\sim}_0 NI' a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \quad (5-38)$$

CONTOH :

Tentukan induksi aksial oleh arus melingkar dalam solenoida.

PENYELESAIAN :

Induksi Magnetik Dalam Solenoida



Sebuah solenoida panjang L, jumlah lilitan N dan penampang berbentuk lingkaran dengan jari-jari a. Jumlah lilitan persatuan panjang $n = N/L$. Diambil unsur panjang dz_0 yang berjarak z_0 dari ujung kiri. Induksi magnetik B pada titik P yang berjarak z_p dari ujung kiri adalah

$$d\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I' a^2 n dz_0}{2(a^2 + (z_p - z_0)^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Induksi magnetik pada titik P adalah

$$\mathbf{B}(z) = \int_0^L \frac{\mu_0 I' a^2 n dz_0}{2(a^2 + (z_p - z_0)^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Untuk menyelesaikan integral ini dilakukan penggantian variabel : $z' = z_0 - z_p$, $dz' = dz_0$ dengan batas integrasi : untuk $z_0 = 0$, $z' = -z_p$ dan untuk $z_0 = L$, $z' = L - z_p$. Dengan demikian induksi magnetik pada titik P adalah :

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I' a^2 n}{2} \int_{-z_p}^{L-z_p} \frac{dz'}{(a^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 n I'}{2} \left\{ \frac{(L - z_p)}{[a^2 + (L - z_p)^2]^{1/2}} + \frac{z_p}{(a^2 + z_p^2)^{1/2}} \right\} \quad (5-41)$$

Dimana $z' = z_0 - z_p$. Jika hasil di atas dinyatakan dalam sudut α_1 dan α_2 .

$$\mathbf{B}(z) = \frac{1}{2} \mu_0 n I' (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \quad (5-42)$$

Untuk solenoid panjang tak berhingga sudut α_1 dan α_2 mendekati nol sehingga harga B tidak tergantung pada lokasi P

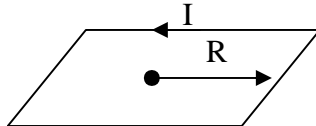
$$\mathbf{B}(z) = \mu_0 n I' \quad (5-43)$$

Jawablah pertanyaan berikut ini bersama kelompokmu. Gunakan referensi yang relevan.

5.1 Sebuah arus I mengalir dalam kawat berjari-jari R .

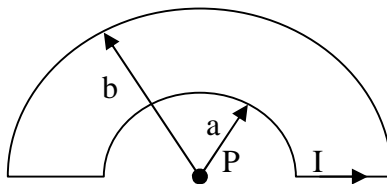
- Jika arus terdistribusi seragam pada permukaan berapakah rapat arus permukaan \mathbf{K} ?
- Jika distribusi arus sedemikian sehingga rapat arus volume berbanding terbalik dengan jarak ke sumbu, berapakah rapat arus volume \mathbf{J} ?

5.2 (a) Carilah induksi magnetik pada pusat sebuah rangkaian persegi yang berarus I . Ambil R sebagai jarak dari pusat ke sisi seperti pada gambar



- Carilah induksi magnetik pada pusat sebuah poligon teratur n -sisi membawa arus I . Ambil R sebagai jarak dari pusat ke sembarang sisi.
- Buktikan bahwa persamaan pada (b) dapat direduksi menjadi induksi magnetik pada pusat rangkaian berbentuk lingkaran dengan mengambil $n \rightarrow \infty$.

5.3 Carilah induksi magnetik pada pusat dari 2 rangkaian setengah lingkaran dengan jari-jari masing-masing a dan b dan 2 arus lurus, berarus I , yaitu pada titik P seperti pada gambar



5.4 Sebuah arus I mengalir dalam kawat berbentuk silinder panjang dengan jari-jari R . Carilah induksi magnetik di dalam dan di luar kawat jika

- Arus terdistribusi seragam di permukaan luar kawat.
- Arus terdistribusi sedemikian sehingga \mathbf{J} sebanding dengan r yaitu jarak terhadap sumbu.

5.5 Sebuah rangkaian berbentuk lingkaran dengan jari-jari R terletak pada bidang xy berpusat pada titik asal dan membawa arus dalam arah berlawanan dengan arah jarum jam jika dilihat dari sumbu z positif.

- Carilah momen dipol magnetik.
- Carilah induksi magnetik pada titik yang jauh dari titik asal.