M.K. LISTRIK MAGNET
JOBSHEET 6

METODA KHUSUS DALAM ELEKTROSTATIKA

3.1.1 Solusi Laplace Dalam Koordinat Silindris

Misalkan solusi Laplace dalam sistem koordinat silindris berbentuk

$$V = P(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$$

Persamaan Laplace menjadi

$$\frac{\Phi Z}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right)+\frac{PZ}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+P\Phi\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$

Membaginya dengan PΦZ dan kemudian mengekspansikan diferensiasi ρ tersebut,

$$\frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\rho}+\frac{1}{P\rho}\frac{dP}{d\rho}+\frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-b^2$$

Suku-suku ρ dan ϕ tak mengandung z dan suku z tak mengandung ρ maupun ϕ. Maka

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=b^2$$

Solusinya adalah

$$Z = C_1 \cosh bz + C_2 \sinh bz$$

Kemudian persamaan untuk ρ dan ϕ dapat dipisahkan lebih lanjut, seperti berikut :

$$\frac{\rho^2}{P}\frac{d^2P}{dr^2}+\frac{\rho}{P}\frac{dP}{d\rho}+b^2r^2=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=a^2$$

Persamaan ϕ yang dihasilkan

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-a^2$$

Solusinya adalah

$$\Phi = C_3\cos a\phi + C_4\sin a\phi$$

Persamaan dalam ρ

$$\frac{d^2P}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dP}{d\rho}+\left(b^2-\frac{a^2}{\rho^2}\right)P=0$$

Ini adalah sebuah bentuk persamaan diferensial Bessel. Solusinya dalam bentuk deret pangkat yang disebut fungsi-fungsi Bessel

$$P=C_5J_a(br)+C_6N_a(br)$$

di mana

$$J_a(br)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(br/2)^{a+2m}}{m!\Gamma(a+m+1)}$$

$$N_a(br)=\frac{(\cos a\pi)J_a(br)-J_{-a}(br)}{\sin a\pi}$$

Jika potensial konstan terhadap ϕ dan z ,maka persamaan Laplace untuk 1 dimensi dapat ditulis

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right)=0$$

Mengintegrasinya sekali ,

$$\left(r\frac{dV}{dr}\right)=A$$

dan sekali lagi,.

$$V = A \ln r + B$$

Jika potensial konstan terhadap r dan z ,maka persamaan Laplace untuk 1 dimensi dapat ditulis

$$\frac{1}{r}\frac{d^2V}{d\phi^2}=0$$

Pengintegrasiaannya menghasilkan

$$V = A\,\phi + B$$

3.1.2 Solusi Laplace Dalam Koordinat Sferis (Bola)

Dalam koordinat sferis persamaan Laplace dapat ditulis sebagai

$$\nabla^2V=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}=0$$

Untuk simetri azimuth V bebas φ sehingga persamaan Laplace dapat ditulis sebagai

$$\nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = 0 \qquad (3\text{-}32)$$

Lakukan separasi variabel dengan mengambil

$$V(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta) \qquad (3\text{-}33)$$

Yaitu dengan membagi persamaan (3-32) dengan (3-33) diperoleh

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) = 0 \qquad (3\text{-}34)$$

Persamaan (3-34) hanya dipenuhi jika kedua suku adalah konstanta atau nol. Jadi

(1) $\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) = l(l+1)$ dan

(2) $\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) = -l(l+1)$ (3-35)

Persamaan (1) dapat ditulis sebagai $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) = l(l+1)R$

dimana solusinya adalah

$$R = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \qquad (3\text{-}36)$$

Persamaan (2) dapat ditulis sebagai $\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) = -l(l+1)\sin\theta\Theta$

dimana solusinya adalah

$$\Theta(\theta) = P_l(\cos\theta) \qquad (3\text{-}37)$$

dimana P_l adalah koefisien dari polinomial Legendre. Dengan demikian solusi umum dari fungsi potensial adalah

$$V(r,\theta) = \left(Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta) \qquad (3\text{-}38)$$

Jika V tidak tergantung pada θ dan ϕ (satu dimensi) maka persamaan Laplace dapat ditulis ,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

Integrasinya sekali memberikan

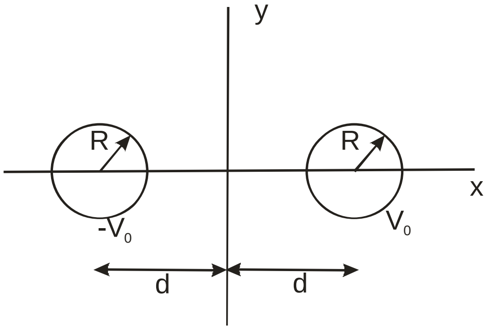
$$\left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = A$$

dan sekali lagi menghasilkan

$$V = \frac{-A}{r} + B$$

LATIHAN :

Dua pipa tembaga lurus panjang masing-masing jari-jarinya R terpisah sejauh 2d satu sama lain. potensial salah satu pipa adalah V_0 dan yang lainnya $-V_0$ seperti pada gambar



Hitung potensial di setiap titik.

KUNCI JAWABAN LATIHAN :

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right]$$ dimana $a^2 = y_0^2 - R^2$ $\quad a = \sqrt{d^2 - R^2}$ dan

$$\left. \begin{array}{l} a \coth \dfrac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda} = d \\ a \operatorname{csc}h \dfrac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda} = R \end{array} \right\} di bagi \qquad \frac{d}{R} = \cosh\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda} \right)$$ atau $$\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\cosh^{-1}(d/R)}$$

Jawablah pertanyaan berikut ini bersama kelompokmu. Gunakan referensi yang relevan.

3.6 Dalam koordinat silindris, V = 75 volt di r = 5 mm dan V = 0 di r = 60 mm. Tentukan potensial di r = 130 mm jika potensial hanya bergantung pada r.

3.7 Dua silinder penghantar konsentris dalam ruang bebas dengan r = 5 mm dan r = 25 mm mempunyai tegangan 0 dan V_0 masing-masingnya. Jika **E** = -8,28 x 10^3 $\hat{r}$ V/m pada r = 15 mm, tentukan V_0 dan rapat muatan pada penghantar sebelah luar.

3.8 Untuk silinder-silinder penghantar konsentris, V = 75 V pada r = 1 mm dan V = 0 pada r = 20 mm. Tentukan **E** dalam daerah di antara kedua silinder.

3.9 Acuan potensial adalah pada r = 15 mm dalam suatu koordinat bola, V = V_0 pada r = 200 mm. Jika diberikan E = - 334,7 $\hat{r}$ V/m pada r = 110 mm, tentukan V_0.

3.10 Dalam koordinat bola, V = 865 volt di r = 50 cm dan **E =** 748,2 $\hat{r}$ V/m pada r = 85 cm. Tentukan kedudukan acuan potensial.