M.K. LISTRIK MAGNET
JOBSHEET 5

METODA KHUSUS DALAM ELEKTROSTATIKA

Perhitungan potensial dengan cara yang telah dibahas sebelum ini seringkali mengalami kesulitan. Hal ini disebabkan karena terutama karena sering distribusi muatan tidak diketahui dengan jelas. Jika distribusi muatan diketahui hitungan integral tidak jarang sulit dilakukan karena bentuk benda yang tidak simetris. Karena itu dikembangkan metoda lain yang dalam bab ini dibahas diantaranya yaitu metoda bayangan dan persamaan Laplace dalam bentuk separasi variabel.

3.1 PERSAMAAN LAPLACE

Persamaan medan listrik

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(r')\,\hat{R}\,d\tau}{R^2} \tag{3-1}$$

dapat digunakan untuk menghitung kuat medan listrik di suatu titik dalam medan listrik listrik yang dihasilkan oleh distribusi muatan volume. Tetapi seringkali untuk menghitung integral ini lebih sulit karena konfigurasi muatan yang tidak sederhana. Jadi biasanya lebih mudah dahulu menghitung potensial dengan persamaan

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(r')d\tau}{R} \tag{3-2}$$

kemudian digunakan hubungan $E = -\nabla V$ untuk menghitung kuat medan listrik E.

Ada kalanya persamaan potensial di atas tidak dapat digunakan secara langsung atau begitu sulit untuk diselesaikan karena kurangnya informasi tentang konfigurasi muatan. Kalau nilai V untuk permukaan batas lebih lengkap atau dapat diketahui maka dapat digunakan persamaan

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3-3}$$

dimana ∇^2 adalah operator Laplacian dan ϕ adalah fungsi potensial V. Persamaan (3-3) disebut juga Persamaan Poisson. Dalam daerah di mana $\rho = 0$, (3-3) disederhanakan menjadi

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{3-4}$$

Persamaan (3-4) disebut Persamaan Laplace. Persamaan Laplace lebih sering digunakan dalam menyelesaikan persoalan elektrostatika. Dalam sistem koordinat Kartesian Persamaan Laplace ditulis

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \tag{3-5}$$

3.2 METODA BAYANGAN

Untuk konfigurasi muatan tertentu seringkali lebih mudah untuk menggunakan metoda bayangan untuk menghitung potensial di suatu titik di dalam ruang. Metoda ini menggunakan muatan bayangan untuk menyederhanakan persoalan elektrostatika sehingga dapat dilakukan perhitungan potensial disuatu titik dalam medan listrik. Persamaan umum yang digunakan adalah

$$\phi = \sum_{actual} \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 R_a} + \sum_{bayangan} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i} \qquad (3\text{-}6)$$

Agar lebih jelas berikut ini akan diberikan 2 buah contoh penggunaan persamaan di atas.

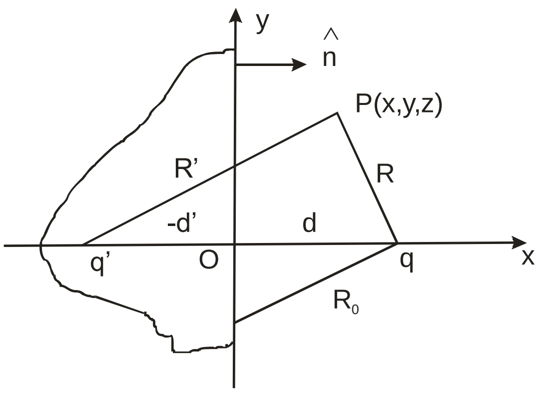
CONTOH :

Gunakan metoda bayangan untuk :
(1) Muatan Titik dan Bidang Konduktor Semi Berhingga Ditanahkan
(2) Muatan Titik dan Bola Konduktor Ditanahkan

PENYELESAIAN :

(1) Muatan Titik dan Bidang Konduktor Semi Berhingga Ditanahkan

Sebuah bidang konduktor bermuatan ditanahkan dan sebuah muatan titik q terletak diluar bidang pada jarak x = d, seperti dapat dilihat pada Gambar 3. berikut ini. Permukaan bidang terletak di x = 0. Titik P (x,y,z) terletak pada jarak R dari muatan q.



Gambar 3.1. Bidang konduktor bermuatan ditanahkan dan sebuah muatan q.

Nilai E dan ϕ di dalam dan diluar konduktor adalah

$$\left.\begin{aligned} E(r) &= 0 \\ \phi(r) &= \text{konstan} \end{aligned}\right\} \text{ dalam konduktor} \qquad (3\text{-}7)$$

$$\left.\begin{aligned} E_n(r) &\neq 0 \\ E_t(r) &= 0 \\ \phi(r) &= \text{konstan} \end{aligned}\right\} \text{ pada permukaan konduktor} \qquad (3\text{-}8)$$

Syarat batas : nilai $\phi(r)$ = konstan pada x = 0. Untuk penyederhanaan dipilih $\phi(r)$ =0 dengan cara ditanahkan. Dengan demikian syarat batas adalah

$$\phi(0,y,z) = 0. \tag{3-9}$$

Digunakan (3-6) untuk memenuhi (3-9) dengan cara menggunakan muatan bayangan tunggal q' yang ditempatkan pada jarak x = d' dalam konduktor. Jarak muatan bayangan ini dengan titik P adalah R'. Potensial pada titik P (x,y,z) adalah

$$\phi(r) = \phi(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2\right]^{1/2}}$$

Karena koordinat q dan q' adalah (d,0,0) dan (-d',0,0) diperoleh

$$\phi(r) = \phi(x,y,z) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{\left[(x-d)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}} + \frac{q'}{\left[(x+d')^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}}\right\} \text{(3-10)}$$

Jika (3-9) digabung (3-10) diperoleh

$$\frac{q}{\left(d^2 + y^2 + z^2\right)} + \frac{q'}{\left(d'^2 + y^2 + z^2\right)} = 0 \tag{3-11}$$

Persamaan (3-11) akan dipenuhi jika

d' = d dan
q' = -q

Dengan demikian (3-10) dapat ditulis

$$\phi(x,y,z) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{\left[(x-d)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}} - \frac{q}{\left[(x+d)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}}\right\} \tag{3-12}$$

Ini adalah solusi lengkap untuk menghitung potensial untuk x ≥ 0. Untuk x < 0 , ϕ = 0 sama dengan (3-9).

Dengan diperolehnya potensial pada titik P (x,y,z) maka dapat dihitung kuat medan E pada titik tersebut dengan cara menghitung komponen vektor :

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{(x-d)}{\left[(x-d)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} - \frac{(x+d)}{\left[(x+d)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}\right\} \tag{3-13}$$

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} =$$

$$= \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\left[(x-d)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[(x+d)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}\right\} \qquad (3\text{-}14)$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$= \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\left[(x-d)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[(x+d)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}\right\} \qquad (3\text{-}15)$$

Kuat medan E pada titik P adalah

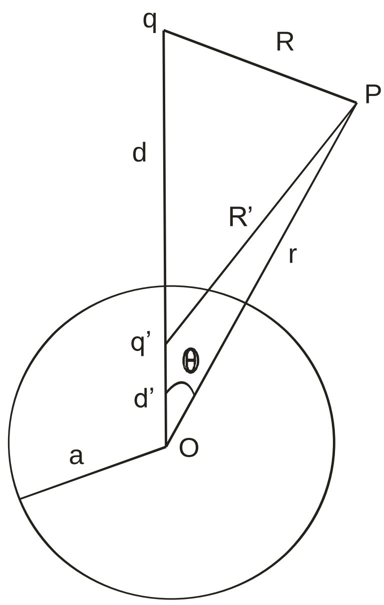
$$E = \sqrt{{E_x}^2 + {E_y}^2 + {E_z}^2} \qquad (3\text{-}16)$$

(2) Muatan Titik dan Bola Konduktor Ditanahkan

Sebuah bola konduktor ditanahkan berjari-jari a dan sebuah muatan titik q yang terletak diluar bola pada jarak d dari pusat menghasilkan potensial pada titik P (r,θ,φ) yang berjarak r dari pusat bola seperti dapat dilihat pada Gambar 3.2. Syarat batas yaitu potensial pada permukaan bola adalah

$$\phi(a,\theta,\varphi) = 0 \qquad (3\text{-}17)$$

Untuk menghitung potensial pada titik P (r,θ,φ), tempatkan muatan bayangan q' pada jarak d' dari pusat bola. Diperlukan d'< a agar q' terletak di dalam bola.



Gambar 3.2. Sebuah bola konduktor ditanahkan berjari-jari a dan sebuah muatan titik q yang terletak diluar bola pada jarak d dari pusat menghasilkan potensial pada titik P (r,θ,φ).

Jarak muatan q dan q' dari P masing-masing adalah R dan R'. Potensial pada titik P adalah

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R}+\frac{q'}{R'}\right) =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left(r^2+d^2-2rd\cos\theta\right)^{1/2}}+\frac{q}{\left(r^2+d'^2-2rd'\cos\theta\right)^{1/2}}\right] \tag{3-18}$$

Jika (3-17) digabung dengan (3-18) diperoleh

$$\frac{q}{\left(r^2+d^2-2rd\cos\theta\right)^{1/2}}+\frac{q}{\left(r^2+d'^2-2rd'\cos\theta\right)^{1/2}}=0 \tag{3-19}$$

3.3 SEPARASI VARIABEL

Dari persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{3-5}$$

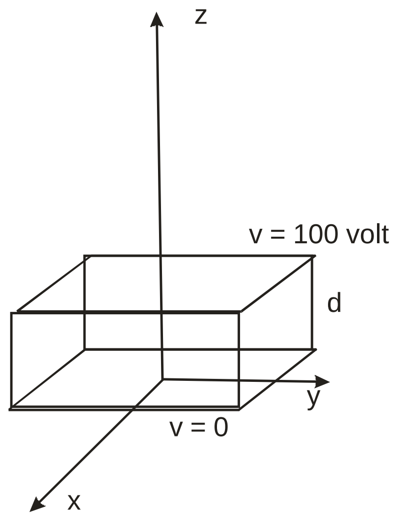
dapat dicari solusinya dalam sistem koordinat Kartesian dan koordinat sferis.

3.3.1 Solusi Laplace Dalam Koordinat Kartesian

Untuk fungsi potensial dalam satu variabel atau 1 dimensi misalnya ketergantungan potensial terhadap z saja maka persamaan (3-5) dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \tag{3-20}$$

Misalkan nilai ϕ atau V adalah V = 0 pada z = 0 dan V = 100 pada z = d seperti dapat dilihat pada Gambar 3.3 dua pelat sejajar bidang xy



Gambar 3.3. Dua pelat sejajar bidang xy.

Potensial hanya berubah dengan z

$$\frac{\partial^2 V}{dz^2} = 0 \;,\; \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{dz}\right) = 0 \;,\; \frac{\partial V}{\partial z} = A \;,\; \partial V = A\partial z \;,\; \int \partial V = A\int \partial z$$

diperoleh

$$V = Az + B \tag{3-21}$$

menurut syarat batas pada z = 0 V = 0 tentulah B = 0. Untuk z = d, V = 100 volt diperoleh
100 = Ad tentulah A = 100/d. Dengan demikian diperoleh

V = Az = 100 (z/d)

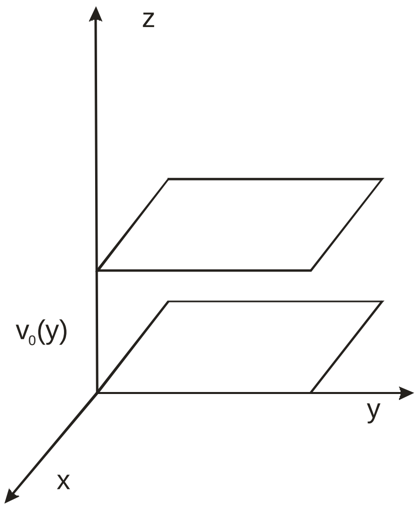
Untuk fungsi potensial yang tergantung pada 2 variabel misalnya ketergantungan potensial pada x dan y maka persamaan Laplace dapat ditulis

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{3-22}$$

Misalkan dua pelat logam panjang tak hingga ditanahkan, paralel bidang xz, pada x = 0 diisolasi dari kedua pelat misalkan nilai ϕ atau V dijaga dengan potensial tertentu $V_0(y)$ sedangkan nilai ϕ atau V memenuhi syarat batas :

(i) V = 0 pada y = 0
(ii) V = 0 pada y = π
(iii) V = $V_0(y)$ pada x = 0
(iv) V $\rightarrow$ 0 pada x $\rightarrow \infty$

Seperti dapat dilihat pada Gambar 3.4



Gambar 3.4. Dua pelat logam panjang tak hingga ditanahkan, paralel bidang xz, pada x = 0 diisolasi dari kedua pelat misalkan nilai ϕ atau V dijaga dengan potensial tertentu $V_0(y)$.

Untuk memperoleh solusi dari persamaan Laplace ini dilakukan pemisahan variabel atau separasi variabel dengan mengambil

$$V(x,y) = X(x)Y(y) \tag{3-23}$$

Kemudian dideferensial fungsi V(x,y) terhadap x dan y diperoleh

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Y\frac{\partial X}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = Y\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\ ,\quad \frac{\partial V}{\partial y} = X\frac{\partial Y}{\partial x}\ \text{dan}\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$$

dengan demikian

$$\nabla^2 V = Y\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \tag{3-24}$$

Jika persamaan (3-24) dibagi dengan persamaan (3-23) diperoleh

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=0 \qquad (3\text{-}25)$$

Persamaan (3-25) hanya dipenuhi jika kedua suku adalah konstanta atau nol. Jadi

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=C_1 \quad \text{dan} \quad \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=C_2 \qquad (3\text{-}26)$$

$C_1 + C_2 = 0$, diambil $C_1 = k^2$, $C_2 = -k^2$ sehingga

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=k^2 X \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=-k^2 Y$$

Solusi dari persamaan diferensial diatas adalah
$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$ dan $Y(y) = C \sin ky + D \cos ky$ sehingga

$$V(x,y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx}) (C \sin ky + D \cos ky) \qquad (3\text{-}27)$$

Syarat batas (iv) mengharuskan A = 0. Serapkan konstanta B ke C dan D diperoleh
$V(x,y) = e^{-kx}$ (C sin ky + D cos ky). Syarat batas (i) membutuhkan D = 0, sehingga

$$V(x,y) = Ce^{-kx} \sin ky \qquad (3\text{-}28)$$

Syarat (ii) menghasilkan : sin kπ = 0 menunjukan bahwa k adalah integer. Untuk setiap harga k terdapat suatu solusi sehingga terdapat tak hingga (∞) solusi

$$V(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-kx}\sin ky \qquad (3\text{-}29)$$

Untuk menghitung koefisien C_k digunakan syarat batas (iii)

$$V(0,y)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin ky = V_0(y) \qquad (3\text{-}30)$$

Gunakan trick Fourier dengan cara mengalikan kedua sisi persamaan dengan sin (ny) dan integrasi dari 0 sampai π dimana n adalah integer positif. Hasil integral ini adalah

$$\int_0^{\pi} \sin ky \sin ny\, dy = \begin{cases} 0 & jika \quad k \neq n \\ \pi/2 & jika \quad k = n \end{cases}$$

Untuk n ≠ k semua suku habis dan untuk n = k menghasilkan (π/2) C_n sehingga

$$C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} V_0(y) \sin ny\, dy \qquad (3\text{-}31)$$

Solusi dari persamaan potensial ini adalah persamaan (3-29) dan (3-31).

CONTOH :
Tentukanlah persamaan potensial untuk 2 dimensi dimana ketergantungan potensial terhadap x dan y dengan syarat batas seperti pada (i),(ii) ,(iii) dan (iv). Misalkan pada x = 0 , V = V_0.

PENYELESAIAN :

$$C_n = \frac{2V_0}{\pi}\int_0^{\pi} \sin ny dy = \frac{2V_0}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{jika n genab} \\ 4V_0/n\pi & \text{jika n ganjil} \end{cases}$$

Sehingga

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{k=1,3,5} \frac{1}{k} e^{-kx} \sin ky$$

Jawablah pertanyaan berikut ini bersama kelompokmu. Gunakan referensi yang relevan.

3.1 Tentukanlah fungsi potensial di ruangan di antara dua piringan bulat sejajar, yang salah satunya berada pada bidang xy pada z = 0 dan lainnya pada sumbu z positif. Fungsi potensial hanya bergantung pada z saja.

3.2 Dua bidang penghantar paralel dalam ruang bebas berada pada y = 0 dan y = 0,02 m, sedangkan acuan potensial nol adalah pada y = 0,01 m. Kalau E = 2,86 x 10^4N/C diantara penghantar-penghantar itu, tentukan potensial pada masing-masing penghantar.

3.3 Piringan-piringan penghantar yang paralel terletak pada sumbu z terpisah pada jarak 5 mm. Potensail pada z = 0 adalah 100 V dan pada z = 5 mm adalah 250 volt. Tentukan kuat medan E di antara kedua piringan tersebut.

3.4 Suatu potensial dalam koordinat kartesian merupakan fungsi dari x. Pada x = - 20 cm, V = 25 volt dan E = 1,5 x $10^3 (-\hat{x})$ V/m di seluruh daerah itu. Tentukan E di x = 3 cm.

3.5 Dalam suatu koordinat kartesian bidang z = 3 cm merupakan bidang acuan potensial. Tentukan potensial pada permukaan penghantar z = 0, kalau **E =** 6,67 x 10^3 $\hat{z}$ V/m untuk z > 0.