M.K. Listrik Magnet
Jobsheet 4

ELEKTROSTATIKA

2.1 HUKUM GAUSS

Jika dilakukan integral permukaan terhadap persamaan (2-27)

$$E(r) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \hat{R}_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^2}$$

akan diperoleh

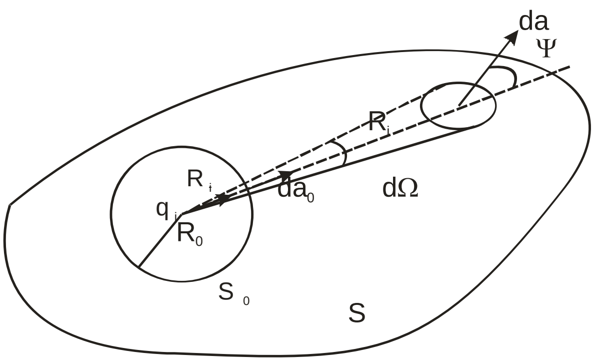
$$\oint_S E.da = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \oint_S \frac{\hat{R}_i .da}{R_i^2} \qquad (2\text{-}37)$$

Terdapat 2 kasus :

1. q_i di dalam S. Dari penentuan komponen vektor elemen luas diperoleh :

$$\frac{\hat{R}_i .da}{R_i^2} = \frac{da \cos\Psi}{R_i^2} = \frac{luasan \perp \hat{R}_i}{R_i^2} = d\Omega \qquad (2\text{-}38)$$

dimana dΩ adalah elemen sudut ruang seperti dapat dilihat pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7. Titik muatan di dalam permukaan S.

Untuk menghitung $\oint_S \frac{\hat{R}_i .da}{R_i^2}$ ditinjau sebuah bola S_0 dengan jari-jari R_0 dimana q_i sebagai pusat,

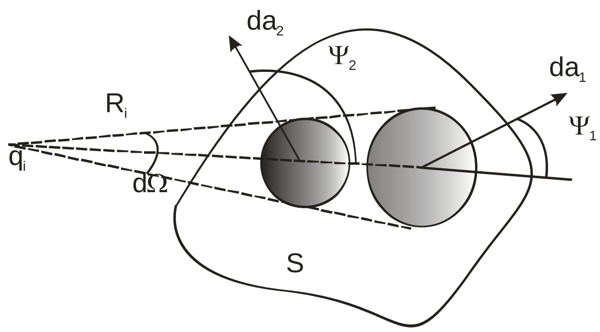
dimana $d\Omega = \frac{da_0}{R_0^2}$. Integral dari dΩ menghasilkan

$$\int d\Omega = \oint \frac{da_0}{R_0^{\ 2}} = \frac{1}{R_0^{\ 2}}\oint da_0 = \frac{4\pi R_o^{\ 2}}{R_0^{\ 2}} = 4\pi \qquad (2\text{-}39)$$

Jadi

$$\oint_S \frac{\hat{R}_i.da}{R_i^2} = 4\pi \qquad \text{(Jika } q_i \text{ di dalam S)} \qquad (2\text{-}40)$$

2. q_i di luar S. Tinjau 2 elemen luas da_1 dan da_2 dari S dengan sudut ruang $d\Omega$ yang sama tetapi sisinya berbeda seperti dapat dilihat pada Gambar 2.8



Gambar 2.7. Titik muatan di luar permukaan S.

Jarak dari q_i masing-masing adalah R_{i1} dan R_{i2}. Diperoleh masing-masing adalah

$$\frac{\hat{R}_i.da_1}{R_{i1}^{\ 2}} = \frac{da_1\cos\Psi_1}{R_{i1}^{\ 2}} = d\Omega \quad \text{dan} \quad \frac{\hat{R}_i.da_2}{R_{i2}^{\ 2}} = \frac{da_2\cos\Psi_2}{R_{i2}^{\ 2}} = -d\Omega$$

sehingga

(2-41)

Karena semua elemen luas dari S saling berpasangan seperti di atas dan saling menghapus maka diperoleh

$$\oint_S \frac{\hat{R}_i.da}{R_i^2} = 0 \qquad \text{(Jika } q_i \text{ di luar S)} \qquad (2\text{-}42)$$

Jadi dari (2-37), (2-39) dan (2-42) didapatkan

$$\oint_S E.da = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \oint_S \frac{\hat{R}_i.da}{R_i^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \qquad (2\text{-}43)$$

Persamaan (2-43) disebut hukum Gauss dalam bentuk integral.

Jumlah muatan total didalam volume V yang dilingkupi oleh permukaan S adalah

$$Q_{in} = \int_V \rho d\tau$$

Jika digunakan teorema divergensi maka persamaan (2-43) dapat ditulis

$$\int_V \nabla.\mathbf{E}d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho d\tau \qquad (2\text{-}44)$$

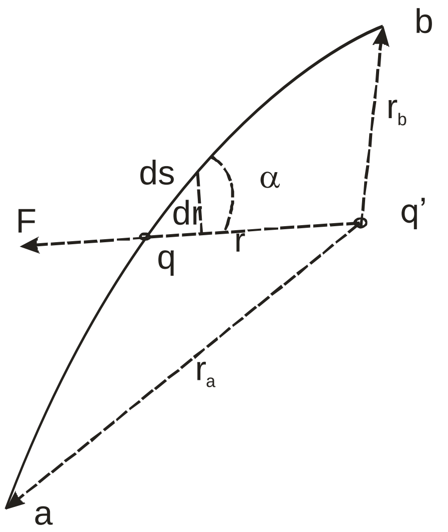
Karena integral ini berlaku untuk volume sembarang V maka persamaan (2-43) dapat ditulis

$$\nabla.\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (2\text{-}45)$$

Pesamaan (2-45) adalah hukum Gauss dalam bentuk diferensial.

2.2 POTENSIAL LISTRIK

Sebuah muatan q digerakkan tanpa percepatan dan tanpa gesekan dalam medan listrik yang dihasilkan oleh muatan q' dari titik a ke titik yang jarak titik-titik tersebut dari q' masing-masing adalah r_a dan r_b seperti dapat dilihat pada Gambar 2.8



Gambar 2.8. Muatan q digerakkan dalam medan listrik yangdihasilkanoleh muatan q'.

Gaya yang bekerja pada muatan q adalah

$$F = F_{q'\to q} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad (2\text{-}46)$$

Agar muatan q dapat bergerak tanpa percepatan diperlukan gaya luar sebesar

$$F_l = - F \qquad (2\text{-}47)$$

Jika q digerakkan sejauh ds maka kerja yang dilakukan adalah

$$dW = F_{l.}ds = -Fds\cos\alpha \qquad (2\text{-}48)$$

dimana α adalah sudut antara Fl dengan ds. Tetapi ds cos α adalah dr sehingga

$$dW = F_{l.}ds = -Fds\cos\alpha = -Fdr \tag{2-49}$$

Kerja total yang dilakukan terhadap q adalah

$$W = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \left.\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r}\right|_{r_a}^{r_b} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right) \tag{2-50}$$

Karena medan listrik adalah medan konservatif maka kerja yang dilakukan tersebut diubah menjadi tambahan energi potensial muatan q, atau

$$W_{a\to b} = EP_b - EP_a \tag{2-51}$$

Dari (2-50) diperoleh energi potensial muatan q di titik a dan b masing-masing adalah

$$EP_a = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_a} \quad , \quad EP_b = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_b} \tag{2-52}$$

Jika r_a diambil di tak berhingga maka

$$W = -\int_{\infty}^{r_b} \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \left.\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r}\right|_{\infty}^{r_b}$$

$$= \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_b} = EP_b \tag{2-53}$$

sehingga energi potensial di titik b dapat didefinisikan sebagai kerja yang dilakukan untuk membawa muatan q dari titik di takhingga ke titik b. Kerja persatuan muatan yang dilakukan untuk membawa muatan q dari titik tak hingga ke titik b disebut potensial pada titik b, V_b yaitu

$$W/q = -\int_{\infty}^{r_b} \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \left.\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r}\right|_{\infty}^{r_b}$$

$$= \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r_b} = V_b \tag{2-54}$$

Secara umum dapat dinyatakan bahwa potensial di suatu titik di dalam medan listrik yang dihasilkan oleh muatan q' adalah besarnya kerja per satuan muatan yang dilakukan untuk membawa muatan tersebut dari titik di tak hingga ke titik tersebut yang besarnya adalah

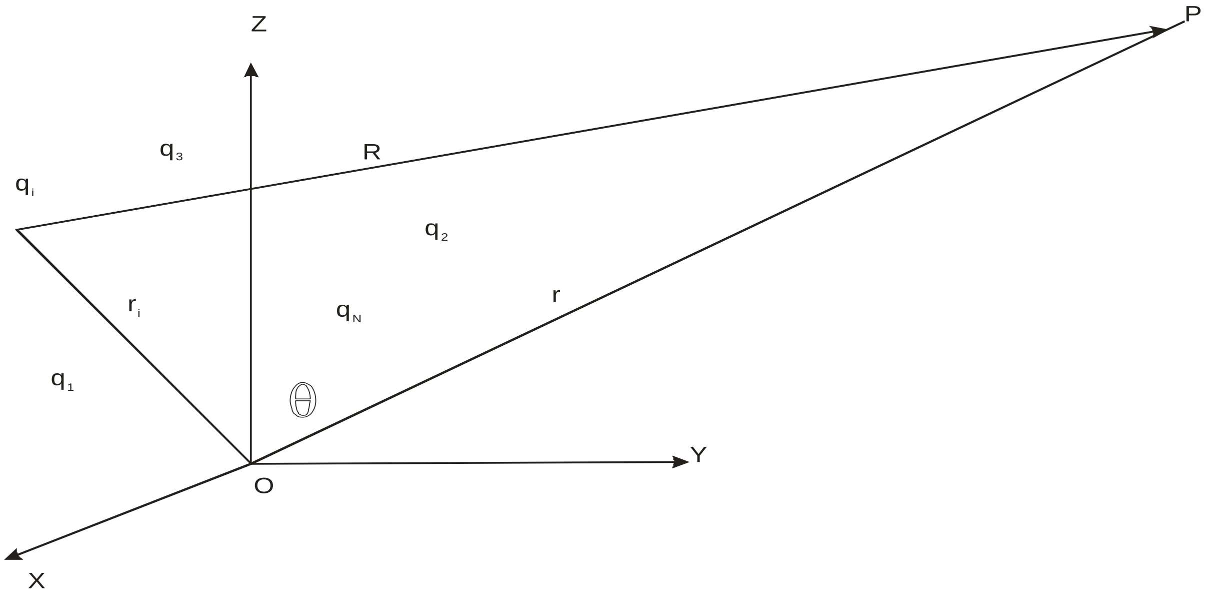
$$V = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2-55}$$

2.3 MULTIPOL LISTRIK

Misalkan kita memiliki sistem N muatan titik q_1, q_2, q_3, ... q_N, dengan vektor posisi masing-masing adalah r_1, r_2, r_3, ... r_N. Potensial V pada titik P yang dinyatakan dengan vektor posisi r adalah

$$V(r) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i} \qquad (2\text{-}56)$$

dimana $R_i = |r - r_i|$, seperti dapat dilihat pada Gambar 2.9



Gambar 2.9 Potensial suatu sistem muatan titik.

Jika sudut yang dibentuk antara r_i dan r adalah θ_i, maka dengan menggunakan hukum cosinus diperoleh

$$R_i = \left(r^2 + r_i^{\,2} - 2rr_i \cos\theta_i\right)^{1/2}$$

Dengan mengeluarkan faktor r dari persamaan diperoleh

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{r(1+t)^{1/2}} \qquad (2\text{-}57)$$

dimana

$$t = -2\left(\frac{r_i}{r}\right)\cos\theta_i + \left(\frac{r_i}{r}\right)^{1/2}$$

Dengan menggunakan deret

$$(1 \pm t)^{-1/2} = 1 \mp \tfrac{1}{2}t + \tfrac{3}{8}t^2 \mp t^3 + \ldots\ldots$$

Diperoleh

$$\frac{1}{(1+t)^{1/2}} = 1 - \frac{1}{2}\left[-2\left(\frac{r_i}{r}\right)\cos\theta_i + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right] + \frac{3}{8}\left[-2\left(\frac{r_i}{r}\right)\cos\theta_i + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]^2$$

$$= 1 + \left(\frac{r_i}{r}\right)\cos\theta_i + \frac{1}{2}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\left(3\cos^2\theta_i - 1\right) \qquad \text{(2-58)}$$

Dengan memasukan Pers (2-56) dimasukkan ke Pers (2-58) diperoleh

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{i=1}^{N} q_i + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum_{i=1}^{N} q_i r_i \cos\theta_i + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sum_{i=1}^{N} q_i r_i^{\,2}\, \tfrac{1}{2}\left(3\cos^2\theta_i - 1\right) + \ldots.. \qquad \text{(2-59)}$$

Pers (2-58) dapat ditulis sebagai

$$V(r) = V_M(r) + V_D(r) + V_Q(r) + \ldots\ldots..$$

yang masing-masing namanya adalah potensial monopol, dipol, quadrapol, dst.....

Pers (2-57) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{\infty} P_l\left(\cos\theta_i\right)\left(\frac{r_i}{r}\right)^l$$

Sehingga persamaan (2-59) dapat ditulis sebagai

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\left[\sum_{i=1}^{N} q_i r_i^{\,l} P_l\left(\cos\theta_i\right)\right] \qquad \text{(2-60)}$$

2.3.1 Potensial Monopol

Suku pertama pada Pers (2-59) dapat ditulis sebagai

$$V_M(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{(2-61)}$$

yang merupakan potensial monopol dari suku-suku multipol listrik dan merupakan suku yang paling dominan.

2.3.2 Potensial Dipol

Suku kedua pada Pers (2-59) dapat ditulis sebagai
atas

$$V_D(r) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p.\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p.r}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad \text{(2-62)}$$

yang merupakan potensial dipol dari suku-suku multipol listrik dan merupakan suku yang memberikan potensial dan medan listrik yang cukup berarti, sesudah suku monopol.

Komponen r dan θ dari medan dipol dapat dihitung dari Pers (2-62) di atas

$$Er = -\frac{\partial V_D}{\partial r} = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{2\cos\theta}{r^3}$$

dan

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V_D}{\partial \theta} = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{\sin\theta}{r^3}$$

LATIHAN :

Jika medan listrik dalam suatu ruang (dalam koordinat sferis) dinyatakan oleh :

$$E = \frac{A\hat{r} + B\sin\theta\cos\phi\,\hat{\phi}}{r}$$

dimana A dan B adalah tetapan berapakah rapat muatan?

KUNCI JAWABAN LATIHAN :

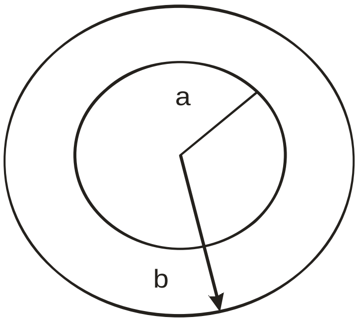
$$\rho = \varepsilon_0 \nabla.E = \varepsilon_0\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{A}{r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{B\sin\theta\cos\phi}{r}\right)\right] =$$
$$= \varepsilon_0\left[\frac{1}{r^2}A + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{B\sin\theta}{r}(-\sin\phi)\right] = \frac{\varepsilon_0}{r^2}(A - B\sin\phi)$$

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut ini bersama kelompokmu! Gunakan referensi yang relevan

2.6 Misalkan kuat medan listrik dalam suatu ruang adalah $E = kr^3\,\hat{r}$ dalam koordinat bola dimana k adalah suatu tetapan.
(a) Hitunglah rapat muatan ρ.
(b) Hitunglah muatan total dalam bola yang berjari-jari R berpusat di titik asal.

2.7 Gunakan hukum Gauss untuk menentukan medan listrik di dalam dan di luar sebuah kulit bola yang berjari-jari R, yang memiliki rapat muatan permukaan seragam σ.

2.8 Sebuah kulit bola berongga mempunyai rapat muatan $\rho = \dfrac{k}{r^2}$ pada daerah $a \leq r \leq b$ seperti gambar. Tentukan medan listrik pada tiga daerah : a) $r < a$, b) $a < r < b$ dan c) $r > b$



2.9 Tentukan potensial di dalam dan di luar bola pejal bermuatan seragam dengan jari-jari R dan muatan total q. Gunakan titik di tak hingga sebagai titik acuan. Hitung gradien V atau ϕ untuk setiap daerah dan periksa apakah sesuai dengan medan listrik yang dihitung sebelumnya.

2.10 Hitung kapasitansi per satuan panjang dari dua tabung silinder sepusat dengan jari-jari a dan b dimana $a < b$.