M.K. Listrik Magnet
Jobsheet 2

ANALISIS VEKTOR

1.3 KALKULUS INTEGRAL

1.3.1 Sifat-Sifat Integral

Misalkan f (x) adalah sebuah fungsi dari sebuah variabel. Teorema dasar dari kalkulus menyatakan

$$\int_a^b \left(\frac{df}{dx}\right) dx = f(b) - f(a) \tag{1-39}$$

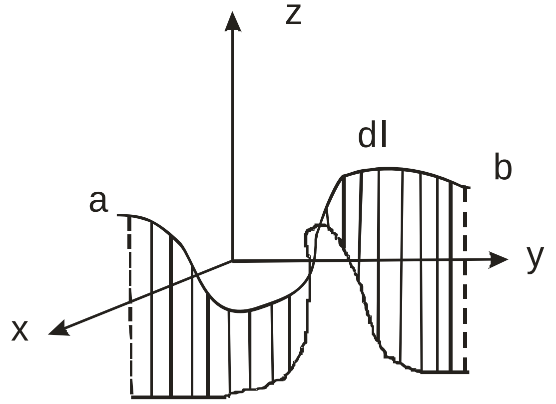
Dalam cara lain dapat ditulis

$$\int_a^b F\left(\frac{df}{dx}\right) dx = f(b) - f(a)$$

dimana $\frac{df}{dx} = F(x)$.

1.3.2 Teorema Dasar Gradien

Misalkan kita memiliki fungsi skalar 3 variabel T(x,y,z). Dimulai dari titik a = (a_x,a_y,a_z) bergerak dengan jarak yang kecil dl_1 seperti dapat dilihat pada Gambar 1.11.



Gambar 1.11. Teorema dasar gradien.

Sesuai dengan persamaan (1-25) fungsi T akan berubah sebesar dT = $(\nabla T).dl_1$. Dengan pergerakan selanjutnya sebesar dl_2 , perubahan T adalah $(\nabla T).dl_2$. Jika pergerakan dilakukan sampai titik b = (b_x,b_y,b_z) maka perubahan total T adalah

$$\int_a^b {}_{garis} (\nabla T).dl = T(b) - T(a) \tag{1-40}$$

Ini adalah teorema dasar gradien.

1.3.3 Teorema Dasar Divergensi

Teorema dasar dari divergensi menyatakan bahwa

$$\int_{volume} (\nabla.\mathbf{v}) d\tau = \oint_{permukaan} \mathbf{v.da} \tag{1-41}$$

Teorema ini memiliki tiga nama yaitu teorema Gauss, teorema Green dan teorema divergensi. Teorema divergensi menyatakan bahwa integral luas dari komponen normal suatu vector v meliputi suatu luasan tertutup sama dengan integral dari divergensi v terhadap volume yang ditutupi oleh luasan tersebut.

1.3.4 Teorema Dasar Curl

Teorema dasar curl menyatakan bahwa

$$\int_{permukaanS} (\nabla \times \mathbf{v}).\mathbf{da} = \oint_{garis-tertutupC} \mathbf{v.dl} \tag{1-42}$$

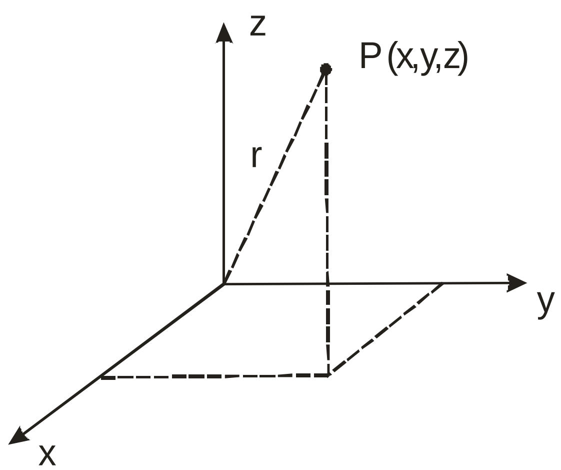
Teorema ini disebut teorema Stokes yang menyatakan bahwa tangensial komponen dari vector v sekeliling lengkungan tertutup C sama dengan intergral luas dari komponen normal dari curl v jika dikenakan pada permukaan S yang dibatasi oleh lengkungan tertutup C.

1.4 SISTEM KOORDINAT

Dalam sistem koordinat ini akan dibahas tiga jenis koordinat yang utama yaitu koordinat Kartesian , koordinat silindris dan koordinat Sferis atau koordinat bola. Berbagai vektor satuan dan operator diferensial untuk setiap koordinat juga akan dibahas.

1.4.1 Koordinat Kartesian

Dalam koordinat Kartesian posisi suatu titik P dinyatakan dalam 3 kuantitas x,y,z yang artinya dapat dilihat pada Gambar 1.12 dibawah ini.



Gambar 1.12 Koordinat Kartesian.

Vektor satuan pada setiap sumbu adalah $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Ketiga vektor satuan ini bernilai tetap. Ketiga vektor satuan saling tegak lurus sehingga berlaku :

$$\hat{x}.\hat{x} = \hat{y}.\hat{y} = \hat{z}.\hat{z} \;,\; \hat{x}.\hat{y} = \hat{y}.\hat{z} = \hat{z}.\hat{x} = 0 \;,\; \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \;,$$
$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \text{ dan } \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}. \tag{1-43}$$

Sebuah vektor A pada koordinat Kartesian dalam bentuk komponen dapat ditulis

$$\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \tag{1-44}$$

Vektor posisi r dan diferensial dr adalah

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y}\rho + z\hat{z}$$
$$\mathbf{dr} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z} \tag{1-45}$$

Elemen volume dτ dalam koordinat Kartesian adalah

$$d\tau = dxdydz \tag{1-46}$$

Komponen dari elemen luas adalah

$$da_x = \pm dydz \quad da_y = \pm dxdz \quad da_z = dxdy \tag{1-47}$$

Untuk operator diferensial dalam koordinat Kartesian dapat dinyatakan sebagai berikut. Jika u = u(x,y,z) maka

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \tag{1-48}$$

Dari $du = ds.\nabla u$, dimana dalam hal ini ds = dr, maka gradien dalam koordinat Kartesian adalah

$$\nabla u = \hat{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1-49}$$

sehingga operator del atau nabla ∇ adalah

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1-50}$$

Jika ∇ bekerja terhadap fungsi vektor A dan fungsi skalar u dalam bentuk divergensi, curl dan Laplacian diperoleh

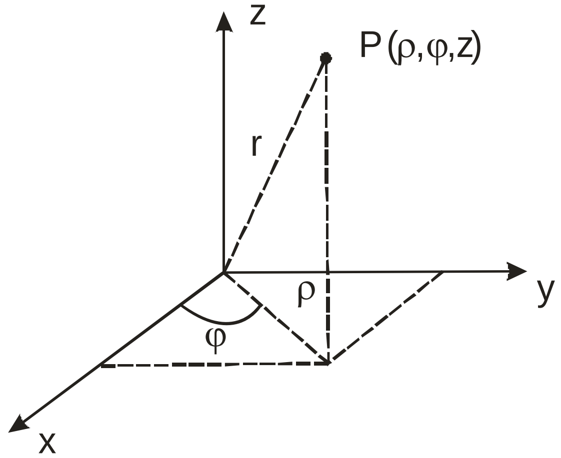
$$\nabla.\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (1\text{-}51$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{dz}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{dx}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{dy}\right) \tag{1-52}$$

$$\nabla^2 u = \nabla.\nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (1\text{-}53)$$

1.4.2 Koordinat Silindris

Dalam koordinat silindris lokasi titik P dinyatakan dengan 3 kuantitas r,ρ,z yang artinya dapat dilihat seperti Gambar 1.13.



Gambar 1.13. Koordinat Silindris.

Dapat dilihat bahwa r adalah jarak dari titik asal., θ adalah sudut yang dibuat oleh r dengan sumbu z. Jika r diproyeksikan ke bidang xy , ρ adalah panjang proyeksi. Sementara φ adalah sudut yang dibuat oleh ρ dengan sumbu x positif. Koordinat z sama dengan koordinat z pada koordinat Kartesian. Hubungan antara koordinat silindris dengan koordinat Kartesian titik P dapat dilihat pada Gambar 1.13

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi \quad z = z \qquad (1\text{-}54)$$

Sehingga

$$\rho = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2} \quad , \text{ dan } \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad (1\text{-}55)$$

Vektor satuan dalam koordinat silindris adalah $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$. Baik $\hat{\rho}$ maupun $\hat{\varphi}$ merupakan fungsi φ sedangkan $\hat{z}$ bernilai tetap. Ketiga vektor satuan saling tegak lurus sehingga berlaku

$$\hat{\rho}.\hat{\rho} = \hat{\varphi}.\hat{\varphi} = \hat{z}.\hat{z} = 1, \quad \hat{\rho}.\hat{\varphi} = \hat{\varphi}.\hat{z} = \hat{z}.\hat{\rho} = 0, \quad \hat{\rho} \times \hat{\varphi} = \hat{z}$$

$$\hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{\rho} \quad \hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\varphi} \qquad (1\text{-}56)$$

Komponen tegak lurus dari $\hat{\rho}, \hat{\varphi}$ dapat dilihat pada Gambar 1.24 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y} \\ \hat{\varphi} &= -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y} \end{aligned} \qquad (1\text{-}57)$$

Persamaan ini dapat diselesaikan untuk memperoleh $\hat{x}, \hat{y}$,

$$\hat{x} = \cos\varphi\,\hat{\rho} - \sin\varphi\,\hat{\varphi}$$
$$\hat{y} = \sin\varphi\,\hat{\rho} + \cos\varphi\,\hat{\varphi} \qquad (1\text{-}58)$$

Jika ( ) dideferensialkan diperoleh variasi $\hat{\rho}, \hat{\varphi}$ terhadap φ,

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} = \hat{\varphi}$$
$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = -\hat{\rho} \qquad (1\text{-}59)$$

Sebuah vektor A pada koordinat silindris dalam bentuk komponen dapat ditulis

$$\mathbf{A} = A_\rho\,\hat{\rho} + A_\varphi\,\hat{\theta} + A_z\,\hat{z} \qquad (1\text{-}60)$$

Vektor posisi r dan diferensial dr adalah

$$\mathbf{r} = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$$
$$\mathbf{dr} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho d\varphi\,\hat{\varphi} + dz\,\hat{z} \qquad (1\text{-}61)$$

Elemen volume dτ dalam koordinat silindris adalah

$$d\tau = \rho d\rho d\varphi dz \qquad (1\text{-}62)$$

Komponen dari elemen luas adalah

$$da_\rho = \pm \rho d\varphi dz \qquad da_\varphi = \pm d\rho dz \qquad da_z = \rho d\rho d\varphi \qquad (1\text{-}63)$$

Untuk operator diferensial dalam koordinat silindris dapat dinyatakan sebagai berikut. Jika u = u(ρ,φ,z) maka

$$du = \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} dz \qquad (1\text{-}64)$$

Dari $du = ds.\nabla u$, dimana dalam hal ini ds = dr, maka gradien dalam koordinat silindris adalah

$$\nabla u = \hat{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \gamma} + \hat{z}\frac{\partial u}{\partial z} \qquad (1\text{-}65)$$

sehingga operator del atau nabla ∇ adalah

$$\nabla = \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (1\text{-}66)$$

Jika ∇ bekerja terhadap fungsi vektor A dan fungsi skalar u dalam bentuk divergensi, curl dan Laplacian diperoleh

$$\nabla.\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1-67}$$

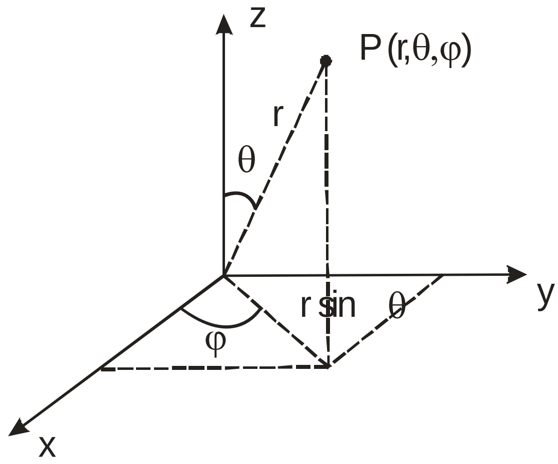
$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{dz}\right) + \hat{\varphi}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{d\rho}\right)$$

$$+\hat{z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\varphi\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{d\varphi}\right) \tag{1-68}$$

$$\nabla^2 u = \nabla.\nabla u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1-69}$$

1.4.3 Koordinat Bola

Dalam koordinat bola lokasi titik P dinyatakan dengan 3 kuantitas r,θ,φ yang artinya dapat dilihat seperti Gambar 1.14.



Gambar 1.14. Koordinat Bola.

Dapat dilihat bahwa r adalah jarak dari titik asal, θ adalah sudut yang dibuat oleh r dengan sumbu z. Jika r diproyeksikan ke bidang xy , r sin θ adalah panjang proyeksi. Sementara φ adalah sudut yang dibuat oleh r sin θ dengan sumbu x positif. Hubungan antara koordinat bola dengan koordinat Kartesian titik P dapat dilihat pada Gambar 1.24

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta \tag{1-70}$$

Sehingga

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} \;, \quad \tan\theta = \frac{\left(x^2 + y^2\right)}{z} \text{ dan } \tan\varphi = \frac{y}{x} \tag{1-71}$$

Vektor satuan dalam koordinat bola adalah $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$. Ketiga vektor satuan merupakan fungsi dari θ dan φ. Ketiga vektor satuan saling tegak lurus sehingga berlaku

$$\begin{gathered}\hat{r}.\hat{r} = \hat{\theta}.\hat{\theta} = \hat{\varphi}.\hat{\varphi} = 1 \;, \quad \hat{r}.\hat{\theta} = \hat{\theta}.\hat{\varphi} = \hat{\varphi}.\hat{r} = 0 \;, \quad r \times \theta = \hat{\varphi} \\ \theta \times \hat{\varphi} = \hat{r}\,, \quad \hat{\varphi} \times \hat{r} = \hat{\theta}\end{gathered} \tag{1-72}$$

Komponen tegak lurus dari $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ dapat dilihat pada Gambar 1.24 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \\ \hat{\theta} &= \cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z} \\ \hat{\varphi} &= -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}\end{aligned} \tag{1-73}$$

Persamaan ini dapat diselesaikan untuk memperoleh $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$,

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \sin\theta\cos\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi - \sin\varphi\,\hat{\varphi} \\ \hat{y} &= \sin\theta\sin\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} + \cos\varphi\,\hat{\varphi} \\ \hat{z} &= \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}\end{aligned} \tag{1-74}$$

Jika ( ) dideferensialkan diperoleh variasi $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ terhadap θ dan φ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} &= \hat{\theta} & \qquad \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} &= \sin\hat{\varphi} \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} &= -\hat{r} & \qquad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi} &= \cos\theta\,\hat{\varphi} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \theta} &= 0 & \qquad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} &= -\sin\theta\,\hat{r} - \cos\theta\,\hat{\theta}\end{aligned} \tag{1-75}$$

Sebuah vektor A pada koordinat bola dalam bentuk komponen dapat ditulis

$$\mathbf{A} = A_r\,\hat{r} + A_\theta\,\hat{\theta} + A_\varphi\,\hat{\varphi} \tag{1-76}$$

Vektor posisi r dan diferensial dr adalah

$$\mathbf{r} = r\hat{r}$$
$$\mathbf{dr} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\hat{\varphi} \tag{1-77}$$

Elemen volume dτ dalam koordinat bola adalah

$$d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \tag{1-78}$$

Komponen dari elemen luas adalah

$$da_r = \pm r^2 \sin\theta d\theta \ , \ \ da_\theta = \pm r\sin\theta dr d\varphi \ \ , \ da_\varphi = r dr d\theta \tag{1-79}$$

Untuk operator diferensial dalam koordinat bola dapat dinyatakan sebagai berikut. Jika u = u(r,θ,φ) maka

$$du = \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial u}{\partial \varphi}d\varphi \tag{1-80}$$

Dari $du = ds.\nabla u$, dimana dalam hal ini ds = dr, maka gradien dalam koordinat bola adalah

$$\nabla u = \hat{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \tag{1-81}$$

sehingga operator del atau nabla ∇ adalah

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{1-82}$$

Jika ∇ bekerja terhadap fungsi vektor A dan fungsi skalar u dalam bentuk divergensi, curl dan Laplacian diperoleh

$$\nabla.\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{1-83}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} = {} & \frac{\hat{r}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta A_\varphi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right] + \frac{\hat{\theta}}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right] \\ & + \frac{\hat{\varphi}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\end{aligned} \tag{1-84}$$

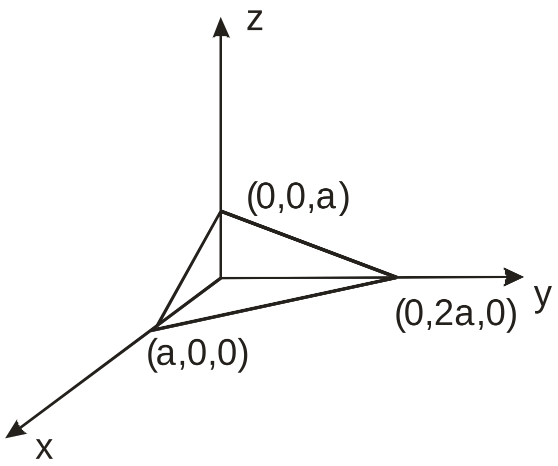
$$\begin{aligned}\nabla^2 u = \nabla.\nabla u = {} & \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \\ & + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\end{aligned} \tag{1-85}$$

LATIHAN :

Buktikan teorema Stokes untuk fungsi :

$$v = y\hat{z}$$

dengan menggunakan permukaan segitiga seperti pada gambar berikut



KUNCI JAWABAN LATIHAN :

$v.dl = ydz$

(1) sisi kiri : z = a - x; dz = - dx; y = 0 $\therefore \int v.dl = 0$

(2) bawah : dz = 0 $\therefore \int v.dl = 0$

(3) belakang : z = a - ½ y; dz = - ½ dy; y : 2a→0

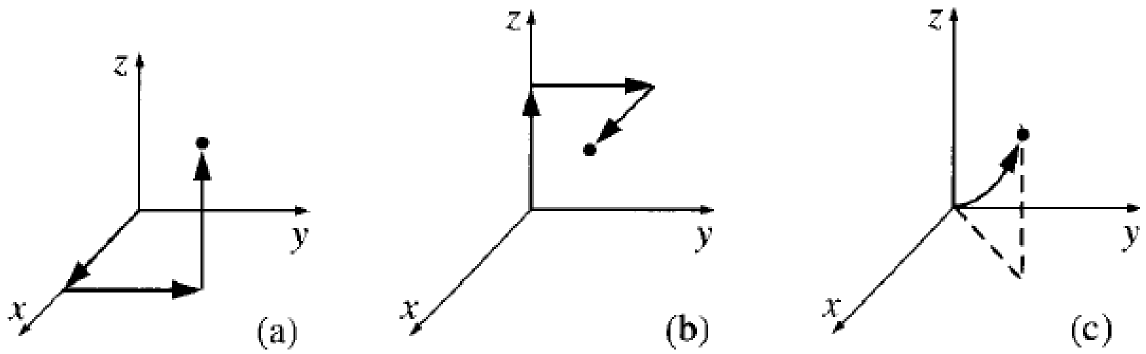
. $\int v.dl = \int_{2a}^{0} y(\text{-½ dy}) = \text{-½} \left.\frac{y^2}{2}\right|_{2a}^{0} = \frac{4a^2}{4} = a^2$

$\nabla \times v = \hat{x}$

$\int (\nabla \times v).da = proyeksi\, permukaan\, ini\, pada\, bidang\, x - y = (1/2).a.2a = a^2$

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut ini bersama kelompokmu! Gunakan referensi yang relevan

1.1 Buktikan teorema dasar gradien dengan menggunakan fungsi T = $x^2 + 4xy + 2yz^3$ dan titik a = (0,0,0), b = (1,1,1) dengan 3 lintasan berbeda :
(a) (0,0,0) → (1,0,0) →(1,1,0) →(1,1,1)
(b) (0,0,0) → (0,0,1) →(0,1,1) →(1,1,1)
(c) lintasan parabola $z = x^2$; $x = y$

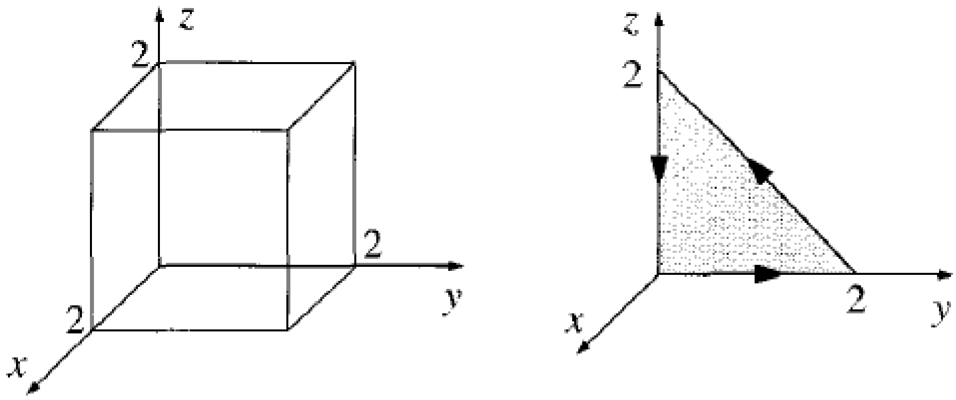


1.2 Periksa teorema divergensi untuk fungsi
$$v = (xy)\hat{x} + (2yz)\hat{y} + (3zx)\hat{z}$$
dengan menggunakan volume kubus dengan panjang sisi 2.

1.3 Periksa teorema Stokes untuk fungsi

$$v = (xy)\hat{x} + (2yz)\hat{y} + (3zx)\hat{z}$$

dengan menggunakan segitiga yang diarsir



1.4 Hitung divergensi untuk fungsi
$$v = \rho(2 + \sin^2\phi)\hat{\rho} + \rho\sin\phi\cos\phi\hat{\phi} + 3z\hat{z}$$

1.5 Hitung divergensi untuk fungsi

$$v = (r\cos\theta)\hat{r} + (r\sin\theta)\hat{\theta} + (r\sin\theta\cos\phi)\hat{\phi}$$