M.K. Listrik Magnet
Jobsheet 1

ANALISIS VEKTOR

Dalam bab ini akan dibahas mengenai aljabar vektor, kalkulus diferensial, kalkulus integral dan sistem koordinat. Pemahaman yang baik tentang analisis vektor akan sangat membantu dalam pemecahan soal-soal keelektromagnetan.

1.1 ALJABAR VEKTOR

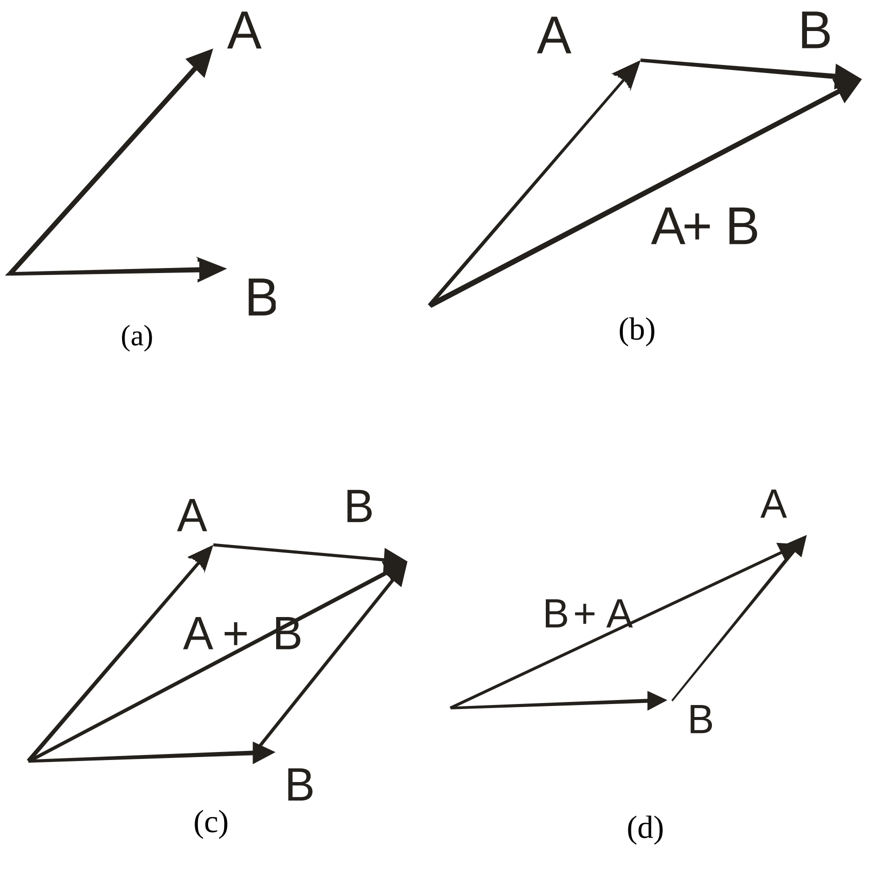
Aljabar vektor meliputi operasi vektor, vektor komponen , triple product dan transformasi vektor.

1.1.1 Operasi Vektor

Ada 4 jenis operasi vektor yang akan dibahas, satu penjumlahan vektor dan 3 jenis perkalian vektor.

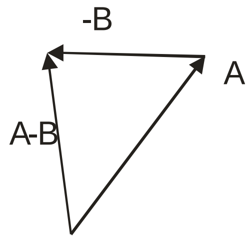
(1) Penjumlahan 2 vektor

Misalnya ada 2 vektor **A** dan **B** seperti pada Gambar 1.1 (a).



Gambar 1.1. Penjumlahan vektor. (a) Dua vektor **A** dan **B**. (b) Penjumlahan vektor secara poligon, (c) Penjumlahan vektor secara jajaran genjang (d) Sifat komutatif vektor.

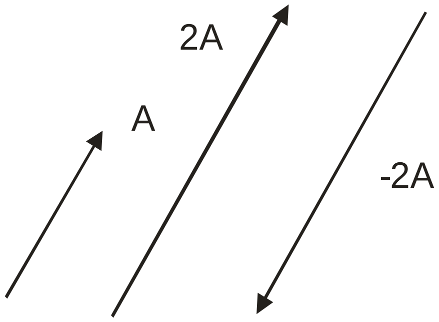
Penjumlahan 2 vektor **A**+**B** dapat dilakukan dengan dua cara yaitu secara poligon dan sistem jajaran genjang seperti dapat dilihat pada Gambar 1.1 (b) dan (c). Penjumlahan vektor bersifat komutatif **A** + **B** = **B** + **A** seperti dapat dilihat pada Gambar 1.1 (d). Selisih dua vektor dapat dilakukan dengan cara penjumlahan dengan oposit vektor, **A** – **B** = **A** + (-**B**) seperti dapat dilihat pada Gambar 1.2.



Gambar 1.2 Selisih dua vektor.

(2) Perkalian vektor dengan skalar.

Perkalian sebuah vektor dengan skalar positif a, perkalian dilakukan dengan besarnya vektor tetapi tidak mengubah arah vektor, tetapi kalau a bernilai negatif arah vektor hasil perkalian berlawanan dengan vektor awal . Misalnya a = 2 atau a = -2 hasil perkalian dapat dilihat pada Gambar 1.3



Gambar 1.3 Perkalian vektor dengan skalar

Perkalian skalar bersifat distributif

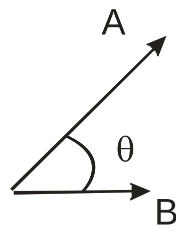
$$a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}$$

(3) Perkalian titik 2 vektor.

Perkalian titik dari dua vektor didefinisikan sebagai

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \qquad (1\text{-}1)$$

Dimana θ adalah sudut yang dibentuk oleh kedua vektor seperti dapat dilihat pada Gambar 1.4.



Gambar 1.4 Perkalian titik dua vektor.

A . B adalah sebuah skalar dan biasa disebut sebagai scalar product. Perkalian titik bersifat komutatif dan distributif,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} \qquad (1\text{-}2)$$

(4) Perkalian silang 2 vektor.

Perkalian silang dari dua vektor didefinisikan sebagai

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin\theta\, \hat{n} \qquad (1\text{-}3)$$

Dimana $\hat{n}$ adalah vektor satuan yang tegak lurus pada bidang AB. Perkalian silang bersifat distributif :

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$$

Tetapi tidak komutatif :

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

Secara geometris $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ adalah luas jajaran genjang yang dibentuk oleh A dan B.

1.1.2 Vektor Komponen

Dalam praktek seringkali lebih mudah bekerja dengan vektor komponen. Dalam sistem koordinat Kartesian sebuah vektor A dapat diuraikan atas vektor basis :

$$\mathbf{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

dimana $\hat{x}, \hat{y}$,dan $\hat{z}$ adalah vektor satuan yang paralel masing-masing dengan sumbu x, y dan z. A_x, A_y dan A_z masing-masing adalah komponen dari vektor **A** yang secara geometris merupakan proyeksi dari **A** sepanjang ketiga sumbu koordinat.

Operasi vektor untuk komponen vektor adalah

(1) Penjumlahan vektor : tambahkan masing-masing komponen :

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) + (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z})$$
$$= (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z} \qquad (1\text{-}7)$$

(2) Perkalian vektor dengan skalar : kalikan masing-masing komponen,

$$a\mathbf{A} = a(A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) = aA_x \hat{x} + aA_y \hat{y} + aA_z \hat{z} \quad 1\text{-}8)$$

(3) Perkalian titik vektor satuan : karena masing-masing vektor saling tegak lurus maka

$$\hat{x}.\hat{x}=\hat{y}.\hat{y}=\hat{z}.\hat{z}=1 \text{ dan } \hat{x}.\hat{y}.=\hat{y}.\hat{z}=\hat{z}.\hat{x}=0 \quad \text{(1-9)}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\mathbf{A.B} &= (A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}).(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z}) \\ &= A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \end{aligned} \quad \text{(1-10)}$$

dan

$$\mathbf{A.A}=A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2\,;\ \mathbf{A}=\sqrt{A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2} \quad \text{1-11)}$$

(4) Perkalian silang vektor satuan : karena masing-masing vektor saling tegak lurus maka

$$\hat{x}\times\hat{x}=\hat{y}\times\hat{y}=\hat{z}\times\hat{z}=0\,,\ \hat{x}\times\hat{y}=-\hat{y}\times\hat{x}=\hat{z}\,,$$
$$\hat{y}\times\hat{z}=-\hat{z}\times\hat{y}=\hat{x} \text{ dan } \hat{z}\times\hat{x}=-\hat{x}\times\hat{z}=\hat{y} \quad \text{(1-12)}$$

sehingga

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})\times(B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z})=$$

$$(A_yB_z-A_zB_y)\hat{x}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{y}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{z} \quad \text{(1-13)}$$

Dengan demikian **A** x **B** dapat ditulis dalam bentuk matrik

$$A\times B=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \quad \text{(1-14)}$$

1.1.3 Triple Product

Triple product adalah perkalian titik dan perkalian silang suatu vektor dengan perkalian silang dua vektor yang lain.

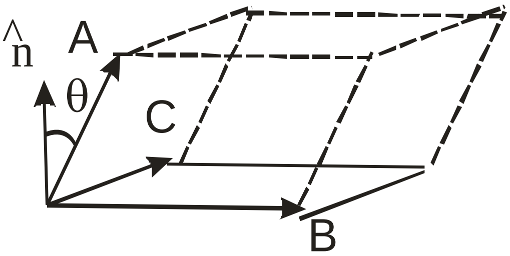
(1) Scalar triple product : **A** . (**B** x **C**)

Bersifat Alphabet : **A** . (**B** x **C**) = **B** . (**C** x **A**) = **C**. (**A** x **B**)
(1-15)
Bersifat Non Alphabet : **A**. (**C** x **B**) = **B** . (**A**x **C**) = **C**.(**B** x **A**)

Dalam bentuk komponen dapat ditulis

$$\mathbf{A.B}\times\mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{1-16}$$

Secara geometris $|\mathbf{A.(BxC)}|$ adalah volume paralel epipedum yang dibuat oleh **A,B** dan **C**, karena $|\mathbf{(BxC)}|$ adalah luas alas dan A cos θ adalah tinggi seperti dapat dilihat pada Gambar 1.5.



Gambar 1.5. **A. (B x C)** secara geometris

(2) Vektor triple product : **A x** (**B** x **C**)
Vektor triple product dapat disederhanakan dengan aturan BAC-CAB :

$$\mathbf{A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)} \tag{1-17}$$

dan

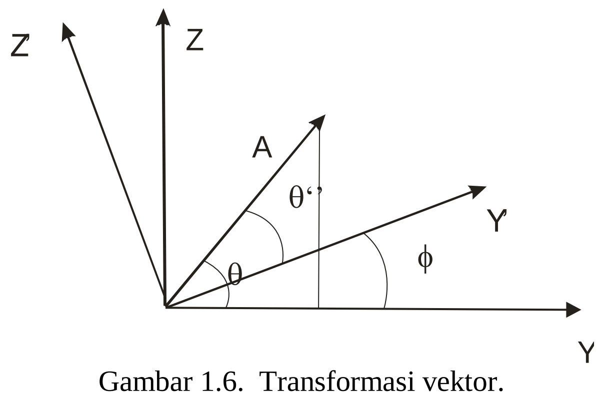
$$\mathbf{(A \times B) \times C = - C \times (A \times B) = - A(B \cdot C) + B(A \cdot C)}$$

Persamaan (1-17) dapat digunakan untuk menghitung perkalian vektor yang lebih tinggi. Misalnya

$$\mathbf{(A \times B)\cdot(C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C)}$$
$$\mathbf{A \times [B \times (C \times D)] = B[A \cdot (C \times D)] - (A \cdot B)(C \times D)} \tag{1-18}$$

1.1.4 Transformasi Vektor

Vektor adalah sebuah kuantitas yang memiliki besar dan arah. Sebuah kerangka koordinat dapat digunakan untuk menyatakan posisi sebuah vektor dalam ruang. Sebuah vektor dapat dikonversi dari suatu kerangka ke kerangka yang lain dengan mengikuti aturan (hukum) tertentu.. Misalkan sistem x’,y’,z’ dirotasikan dengan sudut ϕ relatif terhadap x,y,z sekitar sumbu umum x’ = x’. Dari diagram Gambar 1.6 diperoleh



Gambar 1.6. Transformasi vektor.

$A_y = A\cos\theta, \quad A_z = A\sin\theta$

Sementara

$A_y' = A\cos\theta' = A\cos(\theta-\phi) = A(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi)$
$= \cos\phi\, A_y + \sin\phi\, A_z$

$A_z' = A\sin\theta' = A\sin(\theta-\phi) = A(\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi)$
$= -\sin\phi\, A_y + \cos\phi\, A_z$

Dinyatakan dalam notasi matrik

$$\begin{pmatrix} A_y' \\ A_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{1-19}$$

Lebih umum, untuk rotasi sekitar sumbu sembarang dalam tiga dimensi hukum transformasi berbentuk :

$$\begin{pmatrix} A_x' \\ A_y' \\ A_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{1-20}$$

Atau dapat ditulis dalam bentuk

$$A_i' = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} A_j' \tag{1-21}$$

dimana indeks 1 untuk x, 2 untuk y dan 3 untuk z.

Sebuah tensor adalah sebuah kuantitas dengan sembilan komponen T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yx},…………T_{zz} yang dapat ditransformasi dengan dua faktor R

$T_{xx}' = R_{xx}(R_{xx}T_{xx} + R_{xy}T_{xy} + R_{xz}T_{xz}) + R_{xy}(R_{xx}T_{yx} + R_{xy}T_{yy} + R_{xz}T_{yz})$
$R_{xz}(R_{xx}T_{zx} + R_{xy}T_{zy} + R_{xz}T_{zz})$

Atau dapat ditulis dalam bentuk

$$T_{ij}' = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} R_{ik} R_{jl} R_{kl} \qquad \textbf{(}1\text{-}22\textbf{)}$$

Umumnya**,** sebuah tensor rank ke n memiliki n indeks dan 3^n komponen dan transform dengan n faktor dari R. Dalam tingkatannya, sebuah vektor adalah sebuah tensor rank 1 dan sebuah skalar adalah sebuah tensor rank 0.

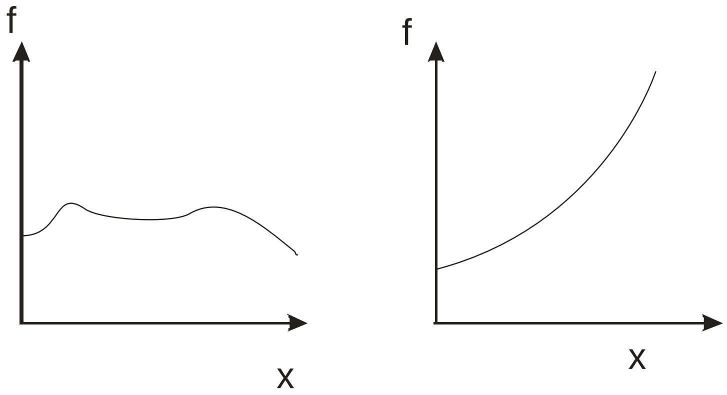
1.2 KALKULUS DIFFERENSIAL

1.2.1 Turunan

Misalkan ada fungsi dari satu variable f(x). Turunan dari fungsi ini terhadap variabel adalah df/dx, artinya fungsi f(x) berubah bila ada perubahan argumen x dengan jumlah yang kecil dx,

$$df = \frac{df}{dx} dx \qquad (1\text{-}23)$$

Artinya jika x berubah sebesar dx maka f akan berubah sebesar df dalam hal ini df/dx merupakan factor kesebandingan. Misalnya pada Gambar 1.7 (a) fungsi berubah secara lambat dengan x, turunannya juga akan kecil. Pada Gambar 1.7 (b) f meningkat tajam dengan x dan turunan akan besar.



(a) (b)

Gambar 1.7. Kurva dari f(x).

Secara geometris dapat dinyatakan bahwa df/dx adalah slope dari kurva f(x).

1.2.2 Gradien

Suatu teorema turunan parsial menyatakan bahwa :

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz \qquad (1\text{-}24)$$

Persamaan (1-24) dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian titik :

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z}\right) \cdot \left(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}\right)$$

$$= (\nabla T).(dl) \qquad (1\text{-}25)$$

dimana

$$dl = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z} \qquad (1\text{-}26)$$

dan

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z} \qquad (1\text{-}27)$$

Persamaan (1-26) disebut pergeseran dan (1-27) gradien dari T yang merupakan suatu kuantitas vektor. Untuk memahami interpretasi geometris dari gradien tulis (1-25) dalam bentuk perkalian titik :

$$dT = \nabla T.dl = |\nabla T|\,|dl| \cos\theta \qquad (1\text{-}28)$$

Gradien ∇T mengarah dalam arah meksimum peningkatan fungsi T. Besarnya $|\nabla T|$ memberikan slope (laju peningkatan) sepanjang arah maksimum.

1.2.3 Operator ∇

Gradien merupakan perkalian vektor ∇ dengan skalar T

$$\nabla T = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)T \qquad (1\text{-}29)$$

Suku dalam tanda kurung disebut operator del ∇ atau nabla

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)$$

Seperti halnya vektor operator ∇ juga bekerja dalam bentuk perkalian melalui 3 cara , bekerja pada :

(1) Fungsi skalar T : ∇T disebut gradien T,
(2) Fungsi vektor v melalui perkalian titik : $\nabla . v$ disebut divergensi v dan
(3) Fungsi vektor v melalui perkalian silang : $\nabla \times v$ disebut curl v.

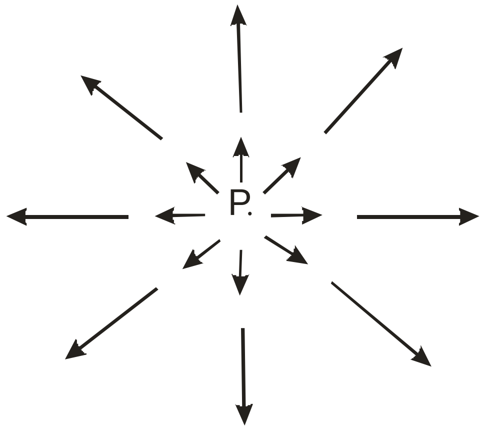
1.2.4 Divergensi

Dari definisi ∇ dalam (1-30) diperoleh

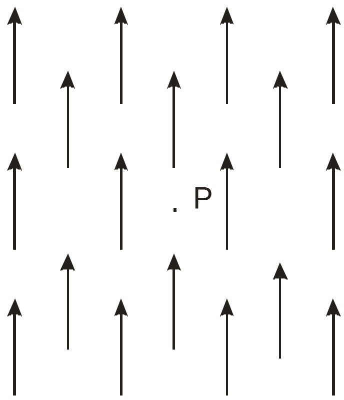
$$\nabla . v = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right) \cdot \left(v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y} + v_z\,\hat{z}\right)$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (1\text{-}31)$$

Interpretasi geometris dari divergensi adalah bahwa divergensi suatu vektor menunjukkan atau mengukur seberapa besar vektor v menyebar dari suatu titik tertentu. Misalnya fungsi vektor seperti pada Gambar 1.8 dan pada Gambar 1.9.



Gambar 1.8 Fungsi vektor yang memiliki divergensi besar di titik P.



Gambar 1.9.   Fungsi vektor yang memiliki divergensi nol di titik P.

Pada Gambar 1.8 terlihat bahwa fungsi vektor memiliki penyebaran yang besar di titik P sedangkan pada Gambar 1.9 fungsi vektor tidak memiliki penyebaran di titik P.

CONTOH :
Tentukan divergensi dari fungsi vektor pada gambar 1.6 dan 1.7.

PENYELESAIAN :

(a) Fungsi vektor pada Gambar 1.6 adalah v_1 = r, karena masing-masing vektor mengarah secara radial menjauhi titik P dan mempunyai panjang atau besar yang sama dari titik P,

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} +$$

Sehingga

$$\nabla . v_1 = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3$$

Jadi fungsi ini memiliki suatu divergensi positif sesuai dengan Gambar 1.8.

(b) Fungsi kedua adalah adalah $v_2 = \hat{z}$, jadi

$$\nabla . v_1 = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Ini sesuai dengan Gambar 1.9.

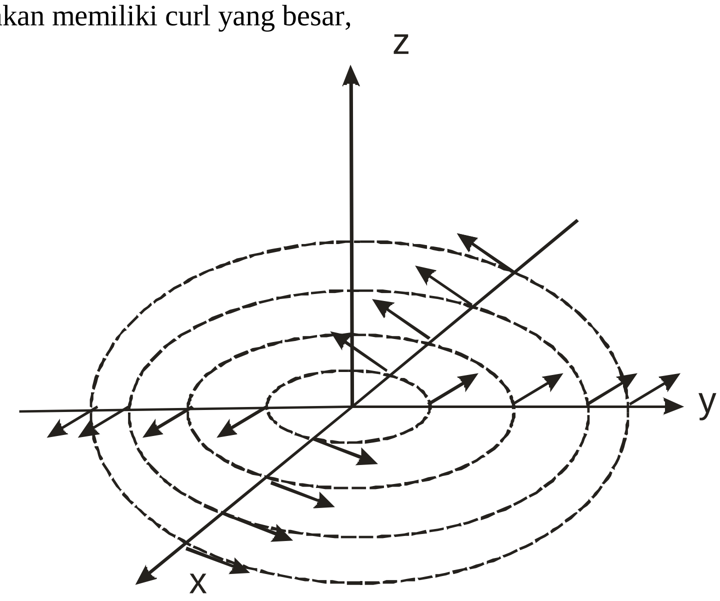
1.2.5 Curl

Dari definisi ∇ pada (1-30) diperoleh

$$\nabla \times v = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} =$$

$$= \hat{x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \qquad (1\text{-}32)$$

Jadi curl dari suatu fungsi vektor v adalah suatu vektor. Interpretasi geometris dari suatu curl adalah bahwa menunjukkan atau mengukur seberapa besar suatu vektor melingkari suatu titik yang ditinjau. Jadi curl dari fungsi v1 dan v2 pada contoh sebelum ini akan menghasilkan nol. Sementara itu fungsi pada Gambar 1.19 akan memiliki curl yang besar,



Gambar 1.10. Curl suatu fungsi vektor.

Curl ini mengarah pada sumbu z dan memiliki sifat aturan tangan kanan.

CONTOH :

Tentukan curl dari fungsi vektor pada gambar 1.10.

PENYELESAIAN :

Fungsi yang dilukiskan pada Gambar 1.10 adalah

$$v_3 = -y\hat{x} + x\hat{y}$$

Sehingga

$$\nabla \times v_3 = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = z\hat{z}$$

Seperti diharapkan curl dari v_3 mengarah ke sumbu z.

1.2.6 Aturan Perkalian

Perhitungan terhadap turunan di dasari oleh sejumlah aturan umum, seperti aturan penjumlahan,

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

aturan perkalian dengan suatu konstanta

$$\frac{d}{dx}(kf) = k\frac{df}{dx}$$

aturan perkalian

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$$

dan aturan pembagian

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\dfrac{df}{dx} - f\dfrac{dg}{dx}}{g^2}$$

Aturan ini juga berlaku untuk turunan vektor. Jadi

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$
$$\nabla.(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\nabla.\mathbf{A}) + (\nabla.\mathbf{B})$$
$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\nabla\times\mathbf{A}) + (\nabla\times\mathbf{B})$$

dan

$$\nabla(kf) = k\nabla f \qquad \nabla.(kA) = k(\nabla.A) \qquad \nabla\times(kA) = k(\nabla\times A)$$

Aturan perkalian tidak begitu sederhana. Ada 2 cara perkalian yang menghasilkan skalar sebagai hasil perkalian dua fungsi :

fg (perkalian dua fungsi skalar)
A.B (perkalian titik dua fungsi vektor)

Dan dua cara untuk menghasilkan vektor :

fA (skalar kali vektor)

A x B (perkalian silang dua fungsi vektor)

Terdapat 6 aturan perkalian, dua untuk gradien

(i) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$,
(ii) $\nabla(\mathbf{A.B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}.\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{A}$
dua untuk divergensi
(iii) $\nabla.(f\mathbf{A}) = f(\nabla.\mathbf{A}) + \mathbf{A}.(\nabla f)$
(iv) $\nabla.(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}.(\nabla\times\mathbf{B})$
dan dua untuk curl
(v) $\nabla\times(f\mathbf{A}) = f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla f)$
(vi) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}.\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}.\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}.(\nabla.\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla.\mathbf{A})$

Juga terdapat 3 aturan pembagian :

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$
$$\nabla.\left(\frac{\mathbf{A}}{g}\right) = \frac{g(\nabla.\mathbf{A}) - \mathbf{A}.(\nabla g)}{g^2}$$
$$\nabla\times\left(\frac{\mathbf{A}}{g}\right) = \frac{g(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla g)}{g^2}$$

1.2.7 Turunan Kedua

Gradien, divergensi dan curl adalah turunan pertama dengan menggunakan ∇. Gunakan ∇ dua kali dapat diturunkan 5 jenis turunan kedua. Gradien ∇T adalah sebuah vektor, sehingga dapat dilakukan divergensi dan curl :

1. Divergensi dari sebuah gradien : ∇.(∇T)
2. Curl dari gradien : ∇ x (∇T)

Divergensi ∇.v adalah sebuah skalar, sehingga dapat diambil gradiennya :

3. Gradien dari divergensi : ∇(∇.v)

Curl ∇ x v adalah sebuah vektor sehingga dapat dilakukan divergensi dan curl :

4. Divergensi dari curl : ∇.(∇ x v)
5. Curl dari curl : ∇ x (∇ x v)

Marilah kita bahas setiap turunan kedua tersebut.

1. ∇.(∇T) = $\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right).\left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{z}\right)$

$$= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T \qquad (1\text{-}33)$$

∇^2 disebut Laplacian T. Laplacian dari sebuah vektor

$$\nabla^2 v = \left(\nabla^2 v_x\right)\hat{x} + \left(\nabla^2 v_y\right)\hat{y} + \left(\nabla^2 v_z\right)\hat{z} \qquad (1\text{-}34)$$

2. Curl dari sebuah gradien selalu nol :

$$\nabla \times (\nabla T) = 0 \qquad (1\text{-}35)$$

Persamaan (1-35) dapat dibuktikan dengan mengingat bahwa

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \qquad (1\text{-}36)$$

3. Gradien dari divergensi : $\nabla(\nabla.v)$ menghasilkan sebuah vektor.
4. Divergensi dari curl : $\nabla.(\nabla \times v)$ sama seperti curl dari sebuah gradien $\nabla \times (\nabla T)$ selalu nol :

$$\nabla.(\nabla \times v) = 0 \qquad (1\text{-}37)$$

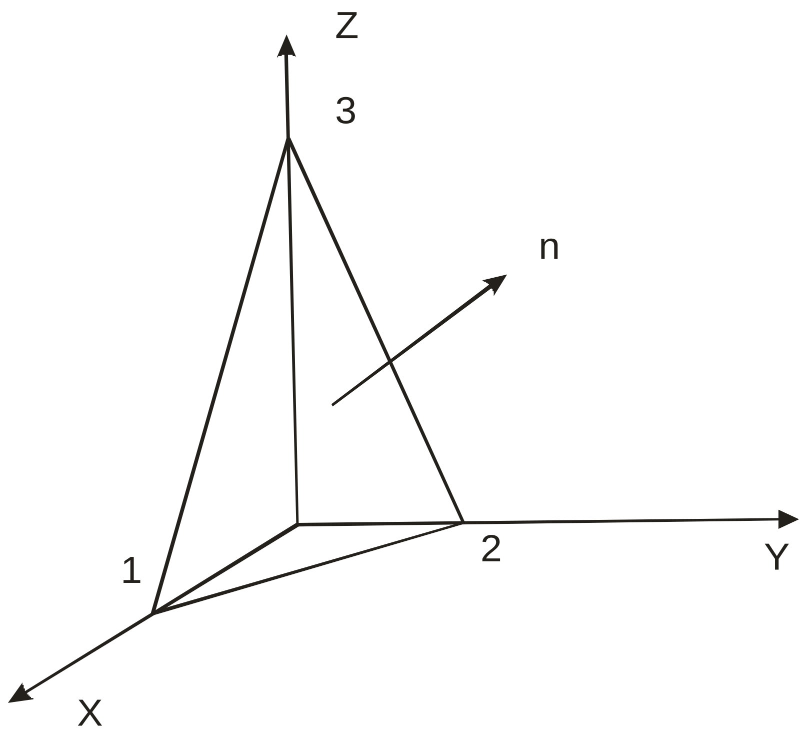
5. Curl dari curl : $\nabla \times (\nabla \times v)$ menghasilkan

$$\nabla \times (\nabla \times v) = \nabla(\nabla.\, v) - \nabla^2 v \qquad (1\text{-}38)$$

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut ini bersama kelompokmu! Gunakan referensi yang relevan

1.1 (a) Carilah komponen dari vektor pergeseran dari titik (2,8,7) ke titik (7,5,11).
(b) Tentukanlah komponen dari vektor pergeseran dari (x_0,y_0,z_0) ke titik (x,y,z).

1.2 Gunakan *cross product* untuk menentukan komponen vektor satuan n yang tegak lurus terhadap bidang seperti pada gambar.



1.3 Carilah gradien dari fungsi berikut ini :
(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$.
(b) $f(x,y,z) = x^2y^3z^4$.
(c) $f(x,y,z) = e^x \sin(y)\ln(z)$.

1.4 Hitung divergensi dari fungsi vektor berikut :
(a) $v_1 = x^2\hat{x} + 3xz^2\hat{y} - 2xz\hat{z}$
(b) $v_2 = xy\hat{x} + 2yz\hat{y} + 2xz\hat{z}$
(c) $v_3 = y_2\hat{x} + (2xy + z^2)\hat{y} + 2yz\hat{z}$

1.5 Hitung rotasi dari fungsi vektor pada soal 1.4.